

対数の性質

西郷 浩

1. 定義：

$$a^c = b \Leftrightarrow \log_a b = c$$

つまり、「 a を何乗したら b になるか」という、その数のことを対数 $\log$ という。「 a の指数部分で b の大きさを測っている」とも解釈できる。基準になる数 a を対数の底（てい）評価の対象になる数 b を真数と呼ぶ。

回りくどい評価法に見えるけれども、このような定義のおかげで対数は便利な性質を多く備えている。

2. 性質：

$$(ア) \log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

すなわち、積の対数は対数の和となる。「乗法が加法に変換できる」ことは、対数の重要な性質のひとつである。

この性質は指数法則に対応するもので、つぎのように示される。いま、

$$c_1 = \log_a b_1, c_2 = \log_a b_2 \quad \text{つまり} \quad b_1 = a^{c_1}, b_2 = a^{c_2} \quad \text{とおく。指数法則によって、}$$

$$b_1 b_2 = a^{c_1+c_2} \quad \text{が成り立つ。対数の定義から、} \log_a (b_1 b_2) = c_1 + c_2 \quad \text{となる。この}$$

式の右辺に c_1, c_2 の定義を代入して性質（ア）がえられる。

同様の考察によって、 $\log_a (b_1/b_2) = \log_a b_1 - \log_a b_2$ も導ける。

$$(イ) \log_a b^r = r \log_a b$$

すなわち、ある数の r 乗の対数値は、その数の対数値の r 倍になる。この性質も指数法則から導かれる。いま、 $c = \log_a b$ つまり $a^c = b$ とする。指数法則によっ

て、 $b^r = (a^c)^r = a^{cr}$ が成り立つ。対数の定義から $\log_a b^r = cr$ となる。この式の右辺に c の定義を代入して性質（イ）がえられる。

$$(ウ) \log_a Y = A + B \log_a X \Leftrightarrow Y = a^A X^B$$

対数変換したデータに直線を当てはめることは、 $\log_a Y = A + B \log_a X$ という関係が近似的に成り立つことを想定している。（ア）と（イ）の性質をもちいれば、

この式の右辺は $\log_a(a^A X^B)$ と書き直せる。したがって、対数変換前のデータに対して $Y = a^A X^B$ が近似的に成り立っていることを想定していることになる。

(エ) $\log_a Y = A + B \log_a X$ における係数 B は弾力性をあらわす。

係数 B は弾力性 (Y の変化率を X の変化率で割った値) になる。厳密な証明には微分が必要だけれども、おおよそつぎのように説明できる。 X と Y との間には、 $Y = a^A X^B$ が成り立つことに注意する。いま、 X の値が X_0 から X_1 に変化したのにともない、 Y の値が Y_0 から Y_1 に変化したとする。 $Y_0 = a^A X_0^B$ で $Y_1 = a^A X_1^B$

の辺々を除せば、 $(Y_1/Y_0) = (X_1/X_0)^B$ となる。 Y の変化率を $y_1 = (Y_1 - Y_0)/Y_0$ で定義する。 X の変化率も同様に定義する。 $Y_1/Y_0 = 1 + y_1$, $X_1/X_0 = 1 + x_1$ を使って、 $1 + y_1 = (1 + x_1)^B$ がえられる。この式の右辺は、 $1 + Bx_1 + R$ (ただし、 R は x_1 の 2 次以上の多項式) と展開できることが知られている (テイラー展開の応用。 $B=1, 2, 3$ などを代入して確かめてみよ)。 X の変化率がある程度小さければ、 x_1 の 2 乗、3 乗、... はほとんど 0 になるので、 R も無視できるほど小さくなる。したがって、 $B = y_1/x_1$ が近似的に成り立つ。つまり、 B は弾力性である。

3. よくもちいられる対数の底：

(ア) 常用対数の底 $a=10$

通常の数値は十進数であらわされている。したがって、10 を底とすると便利なが多い。常用対数では、1 が 0 に (このこと底の選び方によらない)、10 が 1 に、100 が 2 に、1000 が 3 に変換される。したがって、一桁の数値は 0 と 1 の間に、二桁の数値は 1 と 2 の間に、三桁の数値は 2 と 3 の間に変換される。このことの意味は「4. 対数変換の効果」で述べる。

底 10 を省略して $\log 2$ などと表記することも多い。

(イ) 自然対数の底 $a=2.71...$ (この数を e と記す。)

$e=2.71...$ を底とすると、対数の数学的な取り扱いが楽になる。とくに、自然対

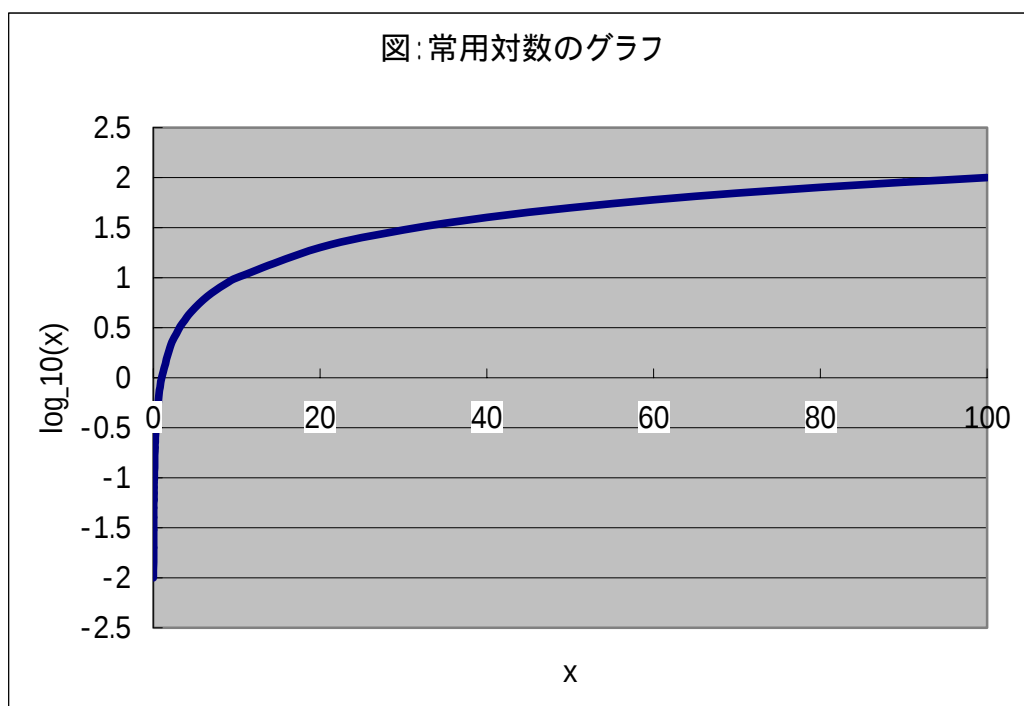
数を微分すると、 $(\log_e x)' = 1/x$ となる。数学的な教科書にあらわれる対数は自然対数とみてまず間違いない。

自然対数も頻出するので、底 e を省略することが多い。常用対数との混同を避けるため、 $\ln 2$ などと表記することもある。

4. 対数変換の効果

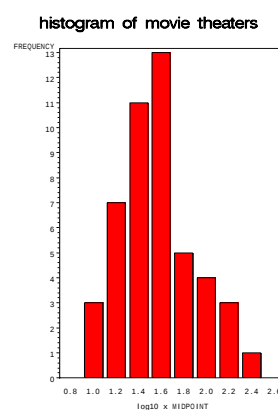
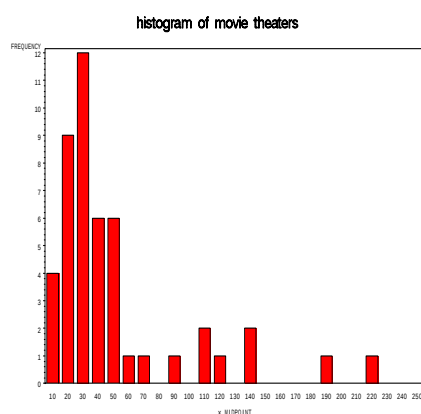
(ア) 対数変換の効果は、「大きな数が相対的に小さめに評価され、小さな数が相対的に

大きめに評価される」ことにある。

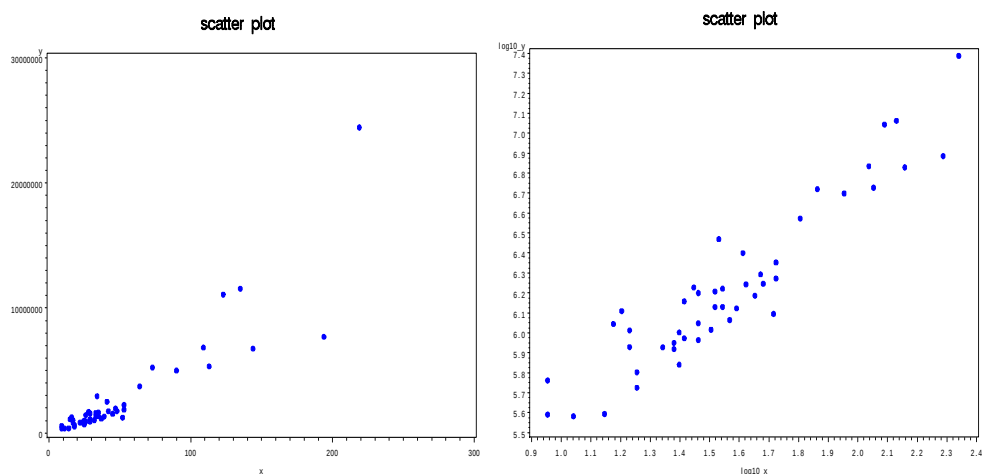


(イ) その結果「相対的に大きな値の差異が縮小され、相対的に小さな値の差異が拡大される」ことになる。このことによって、(1)ヒストグラムの歪みを矯正する、(2)散佈図を直線化する、などの目的に対数変換が有効なのである。

特定サービス産業実態調査（平成 13 年）における都道府県別映画館の数について、(1)原データ（下図左）と(2)常用対数変換したデータ（下図右）の 2 つについてヒストグラムを描くと、対数変換の結果、分布の歪みが矯正され左右対称に近い分布に変わる。



つぎに、特定サービス産業実態調査における都道府県別の映画館数と都道府県別の年間入場者数との関係を見る。先と同様に、(1)原データ（下図左）と(2)常用対数変換したデータ（下図右）の2つについて散布図を描くと、変換前にみられた曲線的傾向が直線に変わり、かつ、上下方向のバラツキの不均一が解消され、直線の当てはめにふさわしい状態が実現することがわかる。



(ウ) 対数変換が比率の分析と相性がいいことを別の角度から説明する。いま、ふたつの正の数値 P , Q 大きさの相違を比率 $R = P/Q$ によって測るとする。 P と Q の大小関係は、 R が 1 より大きいか小さいかで判断できる。その意味で、 $R = 1$ が参照基準である。いま、片方がもう片方の 10 倍であったとすると、 $R = 10$ または $R = 0.1$ である。参照基準からのズレは、前者の方が後者よりも断然大きくなる。もし、比率の基準として Q を分母に置くことに特別の意味があるならば、前者と後者との乖離にも意味がある。しかし、 Q を分母に置くことに特別の意味があるわけではなく、便宜上そのようにしているだけであれば、前者と後者とを公平に扱う必要がある。なぜなら、その場合には、 P/Q と Q/P のうちどちらを比率として採用するかも便宜的な問題であり、分母の選び方によって大小関係の評価が変わるのは不都合だからである。このとき、 $L = \log_{10} R$ によって P , Q の大小を比較すれば、参照基準が $L = \log_{10} 1 = 0$ となり、 $L = \log_{10} 10 = 1$ 、 $L = \log_{10} 0.1 = -1$ となって、参照基準からのズレは同じになる。