

統計学入門 第9回

早稲田大学政経学部
西郷 浩

1

本日の目標

- 価格指数の基礎理論
 - 相対法
 - 総和法
- 数量指数の基礎理論
- 価格指数と数量指数の関係
- 物価指数
- PC実習

2

みかんとオレンジの購入金額・価格・数量

- 家計調査のデータ
 - 1世帯当たり1年間(二人以上世帯)
- 価格変化:
 - みかん: 騰貴; オレンジ: 下落

表1: みかんとオレンジの金額・価格・数量変化

暦年	みかん			オレンジ		
	金額 _円	価格 _{100g}	数量 _{100g}	金額 _円	価格 _{100g}	数量 _{100g}
2010	4514	35.33	127.79	640	35.09	18.23
2011	4349	36.89	117.09	683	33.70	20.28

資料: 総務省統計局「家計調査年報〈家計収支編〉」平成22年およびe-Stat

3

価格指数の考え方: 相対法(1)

- おのものの財の価格変化(価格指数):

$$I^P = P_{2011} / P_{2010} \times 100$$
 - みかん(み):

$$I^P_{\text{み}} = 36.89 / 35.33 \times 100 = 104.4$$
 - オレンジ(オ):

$$I^P_{\text{オ}} = 33.70 / 35.09 \times 100 = 96.0$$
- みかんとオレンジ全体としての価格変化
 - どのように捉えるべきか?

4

価格指数の考え方: 相対法(2)

■ 算術平均:

$$I^{PA} = \frac{1}{2}(I_{み}^P + I_{オ}^P) = \frac{1}{2}(104.4 + 96.0) = 100.2$$

- 欠点: 支出額の大小が反映されていない。

■ 加重平均:

$$I^{PW} = w_{み} I_{み}^P + w_{オ} I_{オ}^P \quad (w_{み}, w_{オ} \geq 0, w_{み} + w_{オ} = 1)$$

- 何をウェイトとするか?

5

価格指数の考え方: 相対法(3)

■ 2010年 (I の分母に対応する時点) の金額割合

$$w_{み} = \frac{P_{み0} Q_{み0}}{P_{み0} Q_{み0} + P_{オ0} Q_{オ0}}, \quad w_{オ} = \frac{P_{オ0} Q_{オ0}}{P_{み0} Q_{み0} + P_{オ0} Q_{オ0}}$$

P_{it} = (時点 t における財 i の価格)

Q_{it} = (時点 t における財 i の数量)

$$i = \begin{cases} \text{み} & (\text{みかん}) \\ \text{オ} & (\text{オレンジ}) \end{cases} \quad t = \begin{cases} 0 & (2010\text{年}) \\ 1 & (2011\text{年}) \end{cases}$$

6

価格指数の考え方: 相対法(4)

■ 2010年の金額構成比:

$$w_{み} = \frac{4514}{4514 + 640} = 0.88, \quad w_{オ} = 0.12$$

■ 相対法による「みかん・オレンジ」価格指数:

$$I^{PW} = 0.88 \times 104.4 + 0.12 \times 96.0 = 103.4$$

■ 注:

- 2010年 (I の分子に対応する時点) の金額構成比をウェイトとするときには、別の算式を使う。

7

価格指数の考え方: 総和法(1)

■ 2010年と2011年の金額比:

$$I^V = \frac{V_1}{V_0} \times 100 = \frac{P_{み1} Q_{み1} + P_{オ1} Q_{オ1}}{P_{み0} Q_{み0} + P_{オ0} Q_{オ0}} \times 100 = 97.6$$

- 価格変化と数量変化が混在している。
- 価格変化のみを取り出すには?
 - 数量を固定する。
 - どのように?

8

価格指数の考え方: 総和法(2)

- Laspeyres 算式: 分母に対応する時期の数量:

$$I^{PL} = \frac{P_{\text{み}1}Q_{\text{み}0} + P_{\text{お}1}Q_{\text{お}0}}{P_{\text{み}0}Q_{\text{み}0} + P_{\text{お}0}Q_{\text{お}0}} \times 100$$

- 分母
= 2010年の数量を2010年の価格で購入したときの購入金額
= 2010年の実際の購入金額
- 分子
= 2010年の数量を2011年の価格で購入したときの購入金額
= 2011年の仮想的な購入金額
- 「2010年と同じ買い物を2011年にしたら支出はいくらか」を求め、2010年の支出額との比によって、価格変化を把握する。

9

価格指数の考え方: 総和法(3)

- Paasche 算式: 分子に対応する時期の数量:

$$I^{PP} = \frac{P_{\text{み}1}Q_{\text{み}1} + P_{\text{お}1}Q_{\text{お}1}}{P_{\text{み}0}Q_{\text{み}1} + P_{\text{お}0}Q_{\text{お}1}} \times 100$$

- 分母
= 2011年の数量を2010年の価格で購入したときの購入金額
= 2010年の仮想的な購入金額
- 分子
= 2011年の数量を2011年の価格で購入したときの購入金額
= 2011年の実際の購入金額
- 「2011年と同じ買い物を2010年にしたら支出はいくらか」を基準として、2011年の支出額を除いて価格変化を把握する。

10

価格指数の考え方: 総和法(4)

- 数量を固定する他の方法
 - Edgeworth 算式
 - 2時点での数量の算術平均
 - マーケット・バスケット方式
 - 分母・分子の時点とは異なる時点の数量
- Laspeyres 算式が使われることが多い。
 - 理由は後述。

11

価格指数の考え方: 総和法(5)

- 総和法による「みかん・オレンジ」価格指数:

$$I^{PL} = \frac{36.89 \times 127.79 + 33.70 \times 18.23}{35.33 \times 127.79 + 35.09 \times 18.23} \times 100 = 103.4$$

$$I^{PP} = \frac{36.89 \times 117.09 + 33.70 \times 20.28}{35.33 \times 117.09 + 35.09 \times 20.28} \times 100 = 103.2$$

12

I^{PW} , I^{PL} , I^{PP} の関係(1)

■ $I^{PW} = I^{PL}$:

$$\begin{aligned} I^{PW} &= w_{\#} I_{\#}^P + w_{\text{オ}} I_{\text{オ}}^P \\ &= \frac{P_{\#0} Q_{\#0}}{V_0} \frac{P_{\#1}}{P_{\#0}} \times 100 + \frac{P_{\text{オ}0} Q_{\text{オ}0}}{V_0} \frac{P_{\text{オ}1}}{P_{\text{オ}0}} \times 100 \\ &= \frac{P_{\#1} Q_{\#0} + P_{\text{オ}1} Q_{\text{オ}0}}{V_0} \times 100 \\ &= \frac{P_{\#1} Q_{\#0} + P_{\text{オ}1} Q_{\text{オ}0}}{P_{\#0} Q_{\#0} + P_{\text{オ}0} Q_{\text{オ}0}} \times 100 = I^{PL} \end{aligned}$$

13

I^{PW} , I^{PL} , I^{PP} の関係(2)

■ $I^{PL} > I^{PP}$ となりやすい:

- 2010年から2011年にかけて:
 - 価格が騰貴した財の購入数量: $Q_{\#0} > Q_{\#1}$ となる傾向
 - 価格が下落した財の購入数量: $Q_{\text{オ}0} < Q_{\text{オ}1}$ となる傾向
- 2010年の数量をもちいたとき:
 - 価格が騰貴した財 in 2011: 相対的に大きい数量が対応
 - 価格が下落した財 in 2011: 相対的に小さい数量が対応
- 2011年の数量をもちいたとき:
 - 価格が騰貴した財 in 2011: 相対的に小さい数量が対応
 - 価格が下落した財 in 2011: 相対的に大きい数量が対応
- 注: Bortkiewicz の関係式参照。

14

Fisher 算式

■ Fisher 算式:

$$I^{PF} = \sqrt{I^{PL} I^{PP}} = \sqrt{103.4 \times 103.2} = 103.3$$

- I^{PF} は、 I^{PL} と I^{PP} の間の値をとる。
- I^{PF} は、指数として好ましい性質を比較的多くもつことが知られている。このため、 I^{PF} を理想算式とよぶことがある。

15

数量指数(1)

■ 価格指数算式において、数量と価格の役割を入れ替える:

■ 相対法:

$$\begin{aligned} I_{\#}^Q &= \frac{Q_{\#1}}{Q_{\#0}}, I_{\text{オ}}^Q = \frac{Q_{\text{オ}1}}{Q_{\text{オ}0}} \\ I^{QW} &= w_{\#} I_{\#}^Q + w_{\text{オ}} I_{\text{オ}}^Q \\ &= 0.88 \times \frac{117.09}{127.79} \times 100 + 0.12 \times \frac{20.28}{18.23} \times 100 \\ &= 94.1 \end{aligned}$$

16

数量指数(2)

■ 総和法:

■ Laspeyres 算式: $I^{QL} = \frac{P_{j,t} Q_{j,t+1} + P_{j,t} Q_{j,t}}{P_{j,t} Q_{j,t} + P_{j,t} Q_{j,t}} \times 100 = 94.1$

■ Paasche 算式: $I^{QP} = \frac{P_{j,t+1} Q_{j,t+1} + P_{j,t+1} Q_{j,t}}{P_{j,t+1} Q_{j,t+1} + P_{j,t+1} Q_{j,t}} \times 100 = 93.9$

■ Fisher算式: $I^{QF} = \sqrt{I^{QL} I^{QP}} = 94.0$

17

価格指数と数量指数との関係(1)

■ 金額条件:

$$I^V = I^P I^Q$$

- 通常の財において成り立つ関係式 $V=PQ$ が指数にも成り立つことを要請した条件

$$I^V \neq I^{PL} I^{QL}, I^V \neq I^{PP} I^{QP}$$

$$I^V = I^{PF} I^{QF} = I^{PL} I^{QP} = I^{PP} I^{QL}$$

18

価格指数と数量指数との関係(2)

■ 実質化:

- 金額を価格指数で除すことによって、価格による変化を除去すること。
- 金額条件が成り立つことを前提に、 I^V を I^P で除すことに相当する。

$$I^{QP} = \frac{I^V}{I^{PL}}, I^{QL} = \frac{I^V}{I^{PP}}, I^{QF} = \frac{I^V}{I^{PF}}$$

- 上のような対応関係に注意する。

19

物価指数(1)

- 財の種類: $i = 1, 2, \dots, N$
- 時点: $t = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$
- 価格: P_{it}
- 数量: Q_{it}
- 金額: $V_{it} = P_{it} Q_{it}$
- 総額: $V_t = \sum_i V_{it}$
- 比較時点: 分子の価格に対応する時点

基準時点: 分母の価格に対応する時点

20

物価指数(2)

- 基準時金額ウェイトの相対法による物価指数:

$$I_t^{PW} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{V_{i0}}{V_0} \right) \left(\frac{P_{it}}{P_{i0}} \right) \times 100$$

- 基準時数量ウェイトのLaspeyres 算式による物価指数:

$$I_t^{PL} = \frac{\sum_{i=1}^N P_{it} Q_{i0}}{\sum_{i=1}^N P_{i0} Q_{i0}} \times 100 = I_t^{PW}$$

21

物価指数(3)

- 比較時数量ウェイトの Paasche 算式による物価指数:

$$I_t^{PP} = \frac{\sum_{i=1}^N P_{it} Q_{it}}{\sum_{i=1}^N P_{i0} Q_{it}} \times 100$$

- Fisher 算式:

$$I_t^{PF} = \sqrt{I_t^{PL} I_t^{PP}}$$

22

物価指数(4)

- さまざまな指数の中で、

$$I_t^{PL} = I_t^{PW}$$

が使われることが多い。

- 比較時点の数量に関する情報が不要である。
- 基準時点の数量に関する情報も、支出に関する情報で代替できる。
- 数量を基準時点に固定したままなので、長期間の使用には耐えない。

23

補足: Paasche 算式の別表現

$$(I_t^{PP})^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^N P_{i0} Q_{it}}{\sum_{i=1}^N P_{it} Q_{it}} \times 100^{-1} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{V_{it}}{V_t} \right) \left(\frac{P_{it}}{P_{i0}} \right)^{-1} \times 100^{-1}$$

比較時金額ウェイトの調和平均

注: XとYの調和平均Z:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Y} \right)$$

24

補足: Bortkiewicz の関係式(1)

$$\frac{I^{PP} - I^{PL}}{I^{PL}} = r^{PQ} \frac{\sigma^{PL}}{I^{PL}} \frac{\sigma^{QL}}{I^{QL}} \quad (r^{PQ} \text{ は負になりやすい})$$

$$I^{PL} = \sum_{i=1}^N w_{i0} I_{it}^P, \quad w_{i0} = \frac{V_{i0}}{V_0}, \quad V_{i0} = P_{i0} Q_{i0},$$

$$V_0 = \sum_{i=1}^N V_{i0}, \quad I_{it}^P = \frac{P_{it}}{P_{i0}} \times 100, \quad I_{it}^{QL} = \sum_{i=1}^N w_{i0} I_{it}^Q,$$

$$I_{it}^Q = \frac{Q_{it}}{Q_{i0}} \times 100, \quad I^{PP} = \sum_{i=1}^N P_{it} Q_{it} \Big/ \sum_{i=1}^N P_{i0} Q_{i0} \times 100$$

25

補足: Bortkiewicz の関係式(2)

$$\sigma^{PL} = \sqrt{\sum_{i=1}^N w_{i0} (I_{it}^P - I^{PL})^2}, \quad \sigma^{QL} = \sqrt{\sum_{i=1}^N w_{i0} (I_{it}^Q - I^{QL})^2},$$

$$r^{PQ} = \frac{\sum_{i=1}^N w_{i0} (I_{it}^P - I^{PL})(I_{it}^Q - I^{QL})}{\sigma^{PL} \sigma^{QL}}$$

$$\therefore (RHS) = \frac{\sum_{i=1}^N w_{i0} (I_{it}^P - I^{PL})(I_{it}^Q - I^{QL})}{I^{PL} I^{QL}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^N w_{i0} I_{it}^P I_{it}^Q - I^{PL} I^{QL}}{I^{PL} I^{QL}} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{P_{it} Q_{it}}{V_0} - I^{PL} I^{QL}}{I^{PL} I^{QL}}$$

$$= \frac{I^V - I^{PL} I^{QL}}{I^{PL} I^{QL}} = \frac{I^{PP} I^{QL} - I^{PL} I^{QL}}{I^{PL} I^{QL}} = \frac{I^{PP} - I^{PL}}{I^{PL}}$$

26

参考文献

- 中村隆英・新家健精・美添泰人・豊田敬
『経済統計入門』第2版 1992年 東京大学出版会
- 経済産業省経済産業政策局調査統計部
編『指数の作成と利用 鉱工業指数読本』
第5版2005年 経済産業統計協会

27

PC実習

- 相対法による価格指数の計算
- 総和法による価格指数の計算
 - Laspeyres 算式
 - Paasche 算式
 - Fisher 算式

28