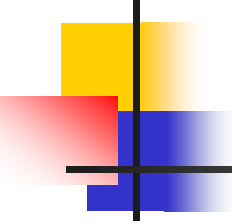


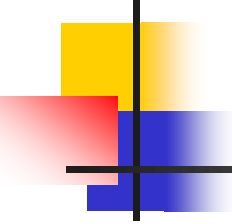
統計学入門 第7回

早稲田大学政治経済学部
西郷 浩



本日の目標

- 直線(および平面)の当てはめ
 - 回帰直線
 - 最小二乗法
 - 当てはまりの評価
 - 決定係数
 - 散布図・残差プロットの活用
 - PC実習

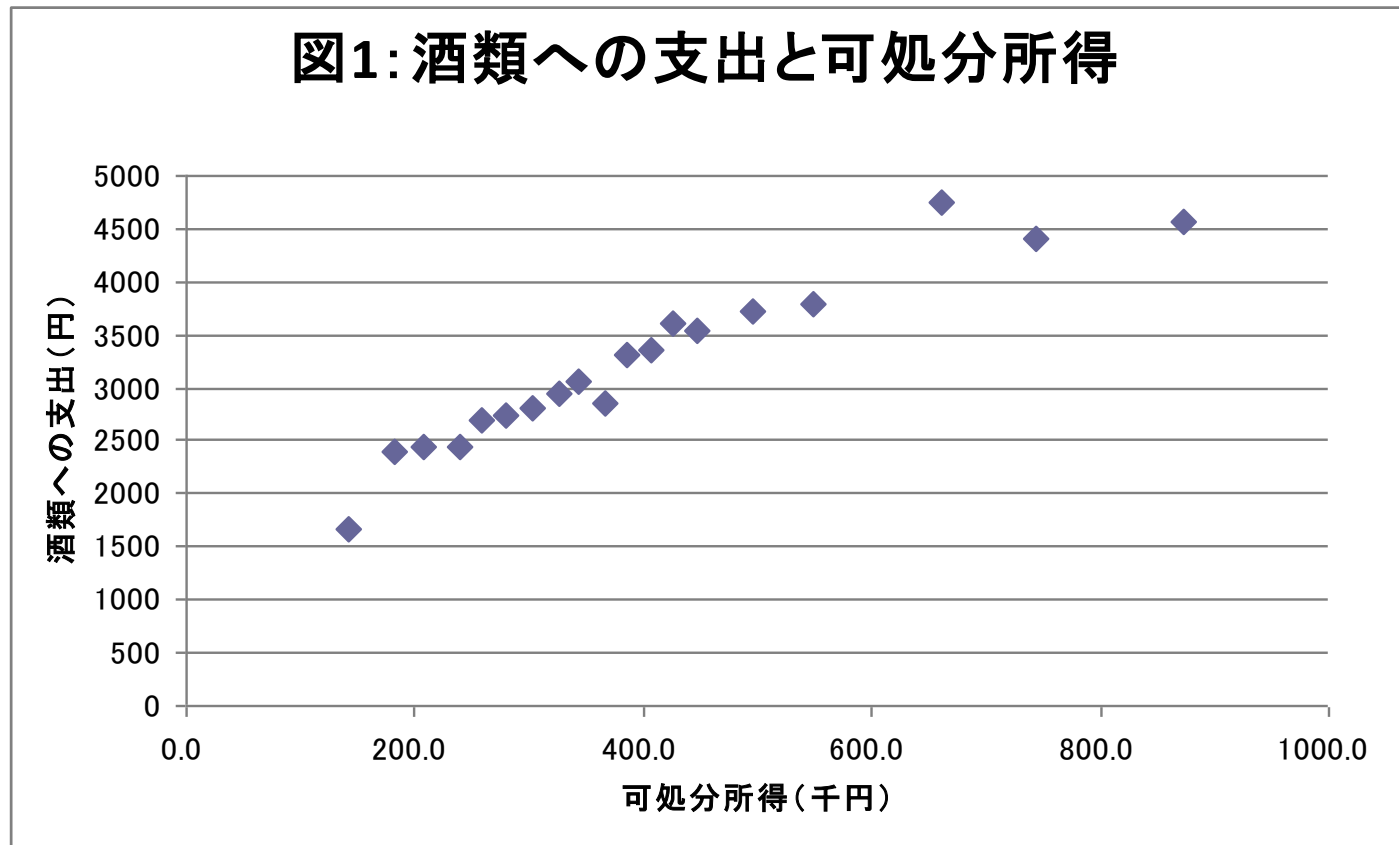


回帰直線(1)

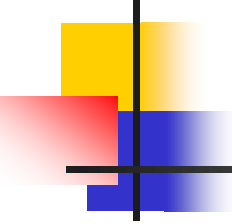
- 2次元データ (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$)
 - y を x の式であらわす。
 - 「 x の値がわかれば、 y の(おおよその)値がわかる」(変数間の関係の要約)
 - 例
 - x_i = (i 番目の個体の可処分所得)
 - y_i = (i 番目の個体の酒類への支出)

回帰直線(2)

図1: 酒類への支出と可処分所得

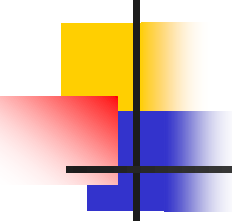


資料: 総務省統計局「平成21年全国消費実態調査」表1



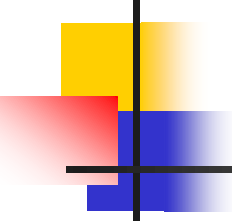
回帰直線(3)

- どのような式が望ましいか。
 - 当てはまりの良いもの。
 - すべての観測点 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$)からのズレ具合が小さいもの。
 - 要約(一種の単純化)であるから、数理的な側面が扱いやすい簡単なもの。
- ⇒ 直線 $y = a + bx$ が候補。



回帰直線(4)

- 目分量で直線を描く⇒客観的でない。
 - 同じデータに対していくつもの「妥当な」直線が描けることになってしまう。
- 客観的な基準の必要性
 - 「すべての観察点 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$) と直線とのズレ」を数量的に定義し、ズレが最小になるように直線的位置を選ぶ(すなわち、 a, b の値を定める)。



最小二乗法(1)

■ 記号の整理

y_i = (観察された y の値)

$\hat{y}_i = a + bx_i$ = (x によって予想される y の値)

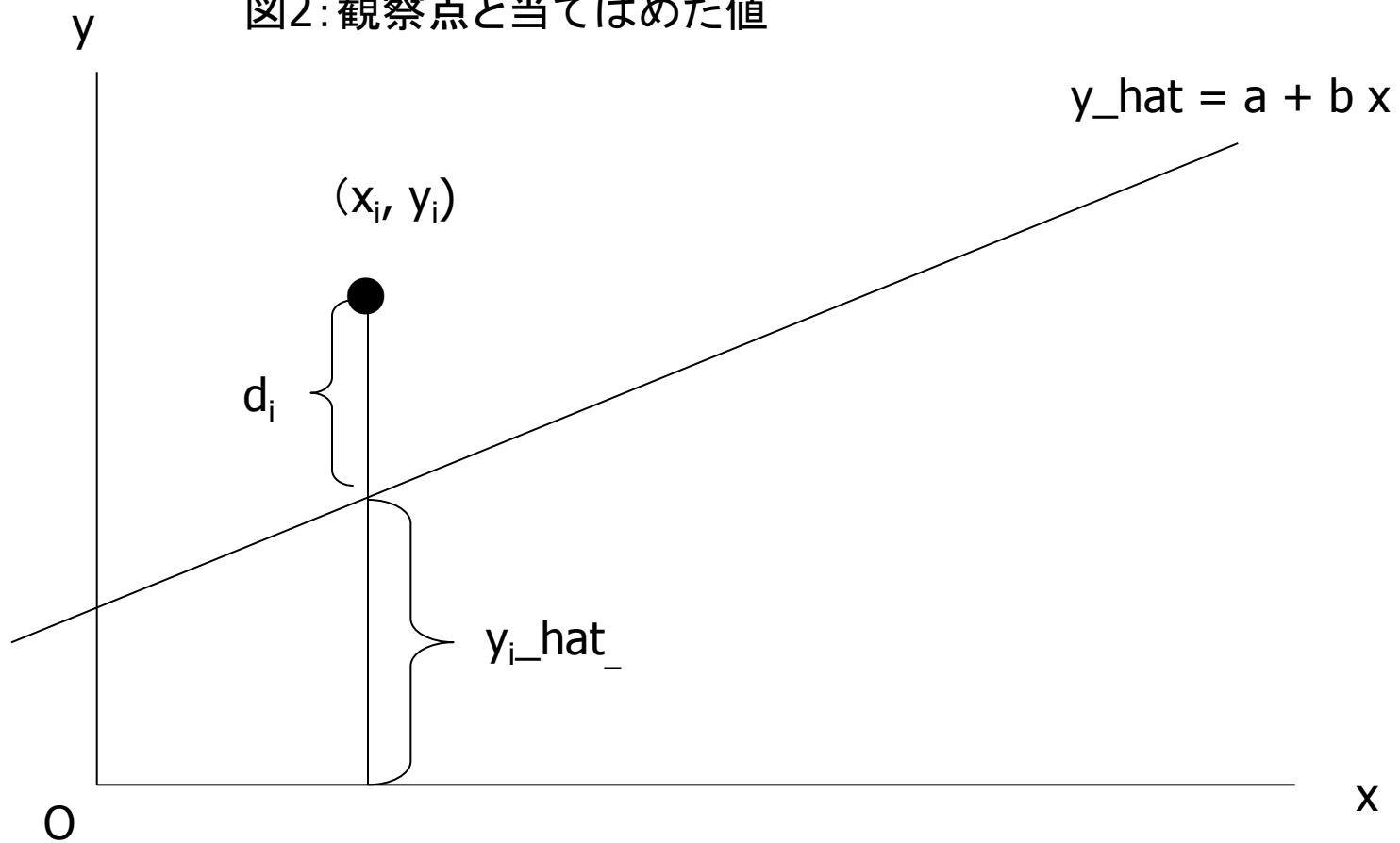
$d_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (a + bx_i)$

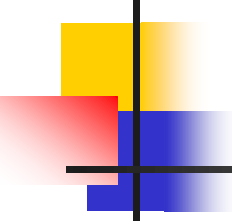
= (観察された y と、 x で予想される y の値との差)

(d_i を残差とよぶ)

最小二乗法(2)

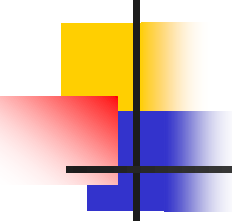
図2: 観測点と当てはめた値





最小二乗法(3)

- 残差 d_i は、第 i 観察点における、観察値と予想値との乖離を示す。
 - x と y との関係を「うまく」要約したいのなら、 $d_i = 0$ となることが望ましい。
 - 特定の(2つまでの) i について、 $d_i = 0$ とするのは可能である。しかし、全部0にすることは無理である。
 - 「観察点全体と直線とのズレ」を残差によって数量的に定義し、それを最小にする。



最小二乗法(4)

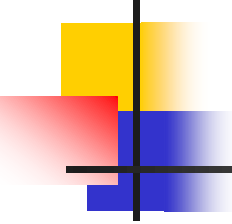
最小二乗法： $\min_{a,b} \sum_{i=1}^n d_i^2 \Leftrightarrow \min_{a,b} \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$

この最小化問題の解 $\Leftrightarrow$ 下の方程式（正規方程式）の解

$$\begin{cases} na + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)b = \left(\sum_{i=1}^n y_i\right) \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)a + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)b = \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right) \end{cases}$$

この連立方程式の解は下のようになる。

$$\begin{cases} b = S_{xy} / S_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ a = \bar{y} - b\bar{x} \end{cases}$$

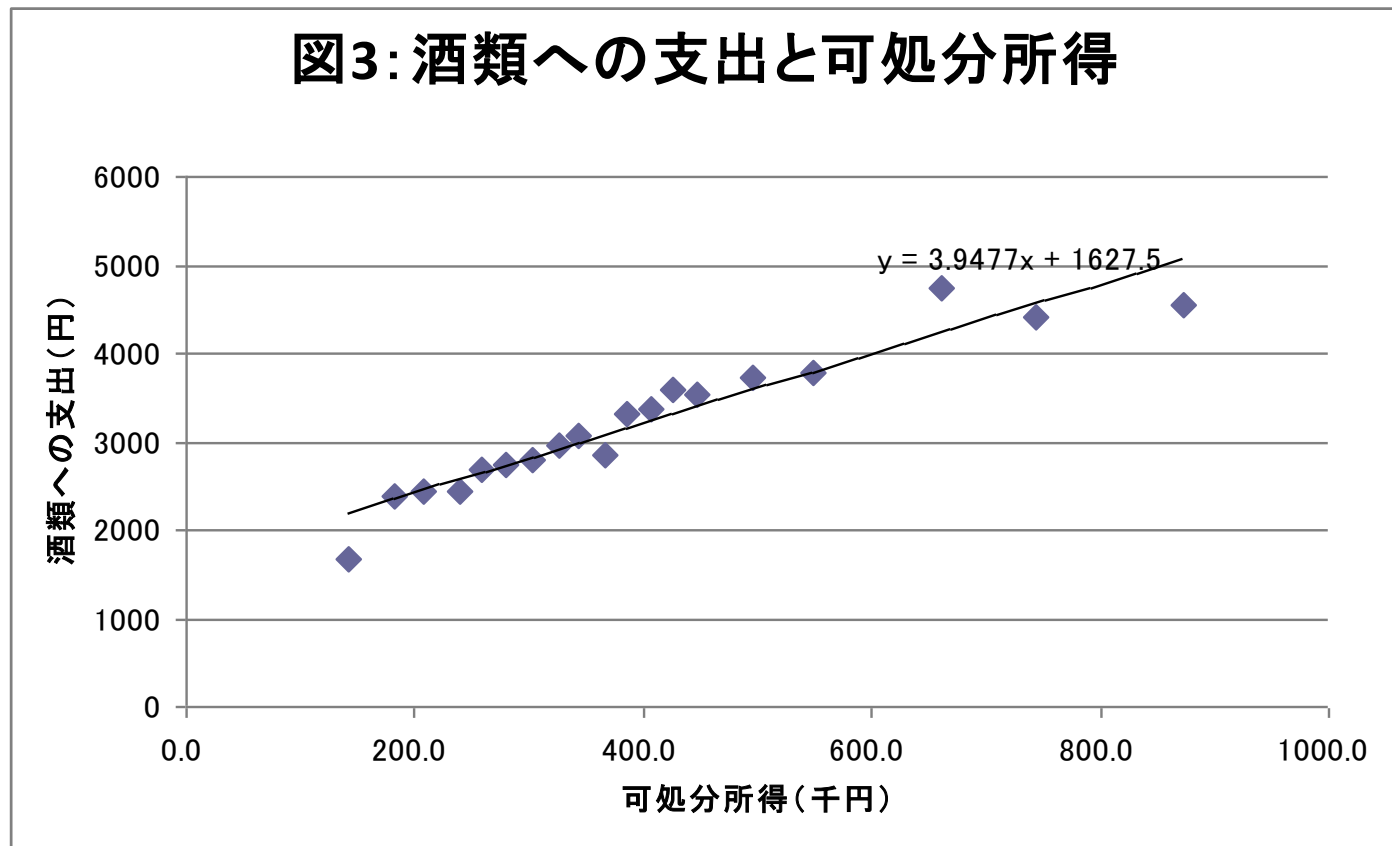


最小二乗法(5)

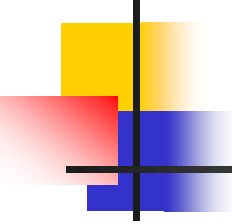
- 可処分所得(x)と酒類 (y)とについて、最小二乗法によって切片 a と傾き b とを求めると、
 - $b = 3.9$
 - $a = 1628$

最小二乗法(6)

図3: 酒類への支出と可処分所得



資料:総務省統計局「平成21年全国消費実態調査」表1

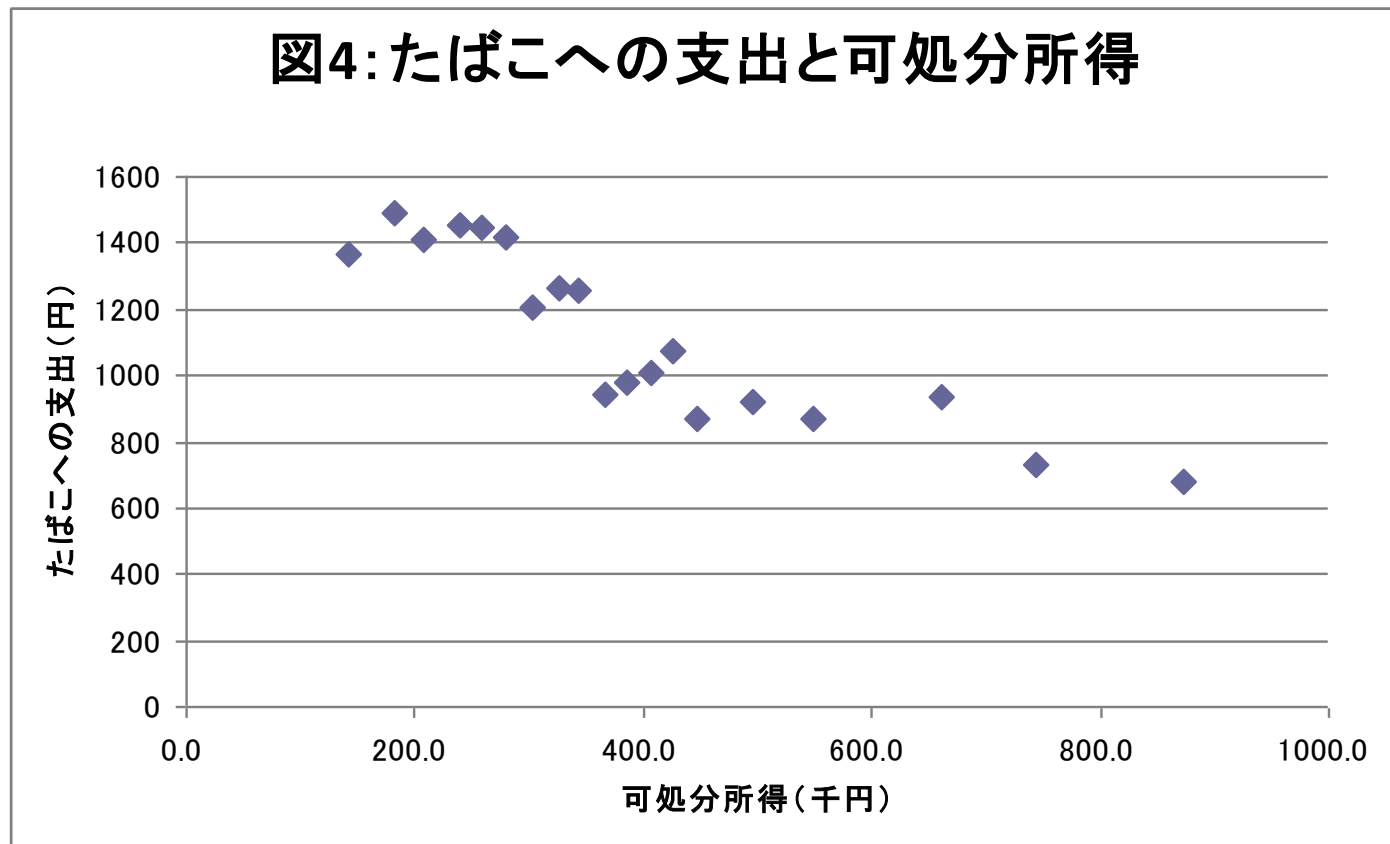


当てはまりの評価(1)

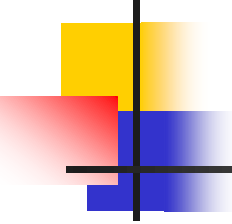
- 対象によって当てはまりに差がある。
 - A. x =(可処分所得), y =(酒類)
 - B. x =(可処分所得), y =(たばこ)見た目の当てはまりはどちらが良い？
- このような相違の評価方法は？
 - 決定係数
 - 散布図・残差プロットの活用

当てはまりの評価(2)

図4: たばこへの支出と可処分所得



資料:総務省統計局「平成21年全国消費実態調査」表1



決定係数(1)

■ 平方和の分解

$d_i = y_i - \hat{y}_i$ であるから、

$$y_i = \hat{y}_i + d_i$$

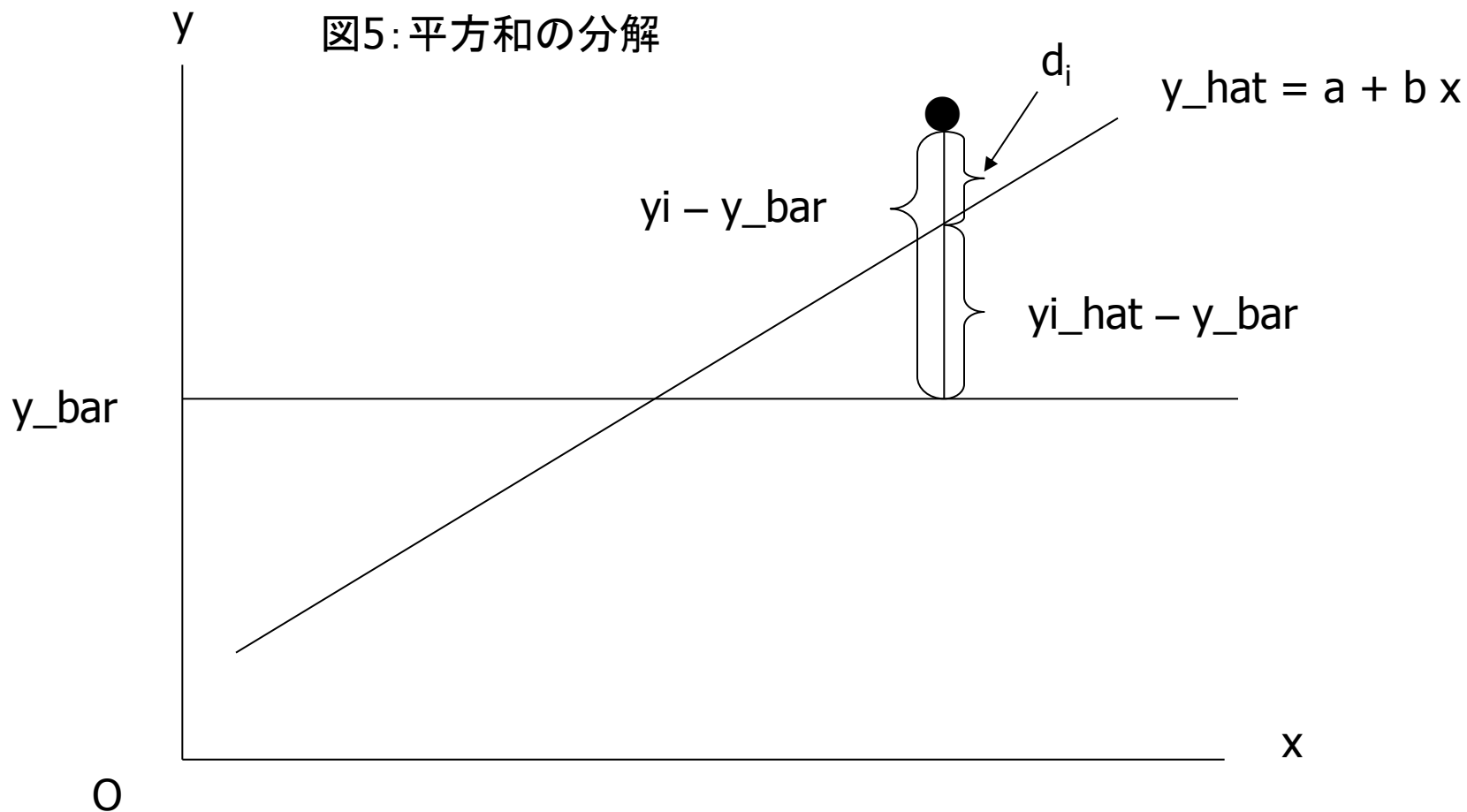
両辺から $\bar{y}$ を引いて、

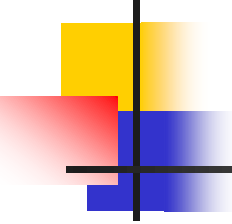
$$(y_i - \bar{y}) = (\hat{y}_i - \bar{y}) + d_i$$

残差 d_i の性質を利用すると、

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n d_i^2$$

決定係数(2)





決定係数(3)

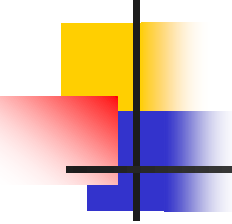
$$SS_0 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = (\text{観察される}y\text{の変動})$$

$$SS_R = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = (\text{回帰式で説明できる}y\text{の変動})$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^n d_i^2 = (\text{回帰式で説明できない}y\text{の変動})$$

とすれば、

$$SS_0 = SS_R + SS_E$$



決定係数(4)

平方和（二乗和）なので、

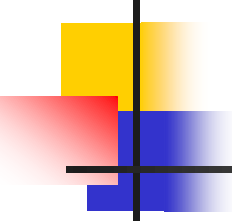
$$SS_0 \geq 0, SS_R \geq 0, SS_E \geq 0$$

したがって、

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{SS_R}{SS_0} = \frac{\text{(回帰式で説明できる}y\text{の変動)}}{\text{(観察される}y\text{の変動)}} \\ &= 1 - \frac{SS_E}{SS_0} \end{aligned}$$

とすれば、 $0 \leq R^2 \leq 1$ であり、

これが1に近いほど当てはまりがよいことをあらわす。



決定係数(5)

- 決定係数

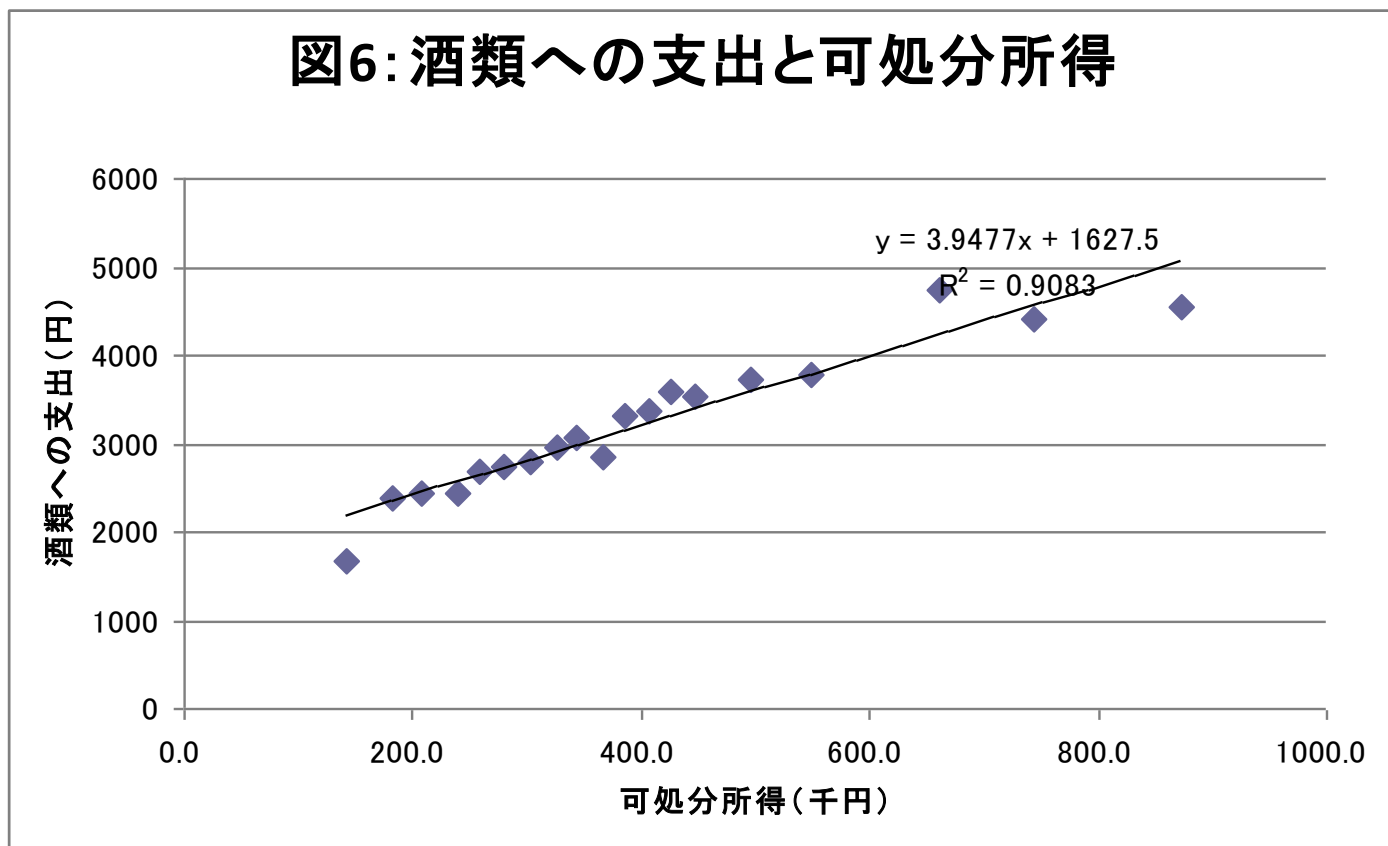
- A: 可処分所得と酒類 $R^2 = 0.91$
- B: 可処分所得とたばこ $R^2 = 0.79$

- 決定係数と相関係数との関係

- $R^2 = r_{xy}^2$
 - 教科書はこの関係式を使って決定係数を定義している。
- 直線関係の強さの尺度のひとつにすぎないことに注意する。

決定係数(6)

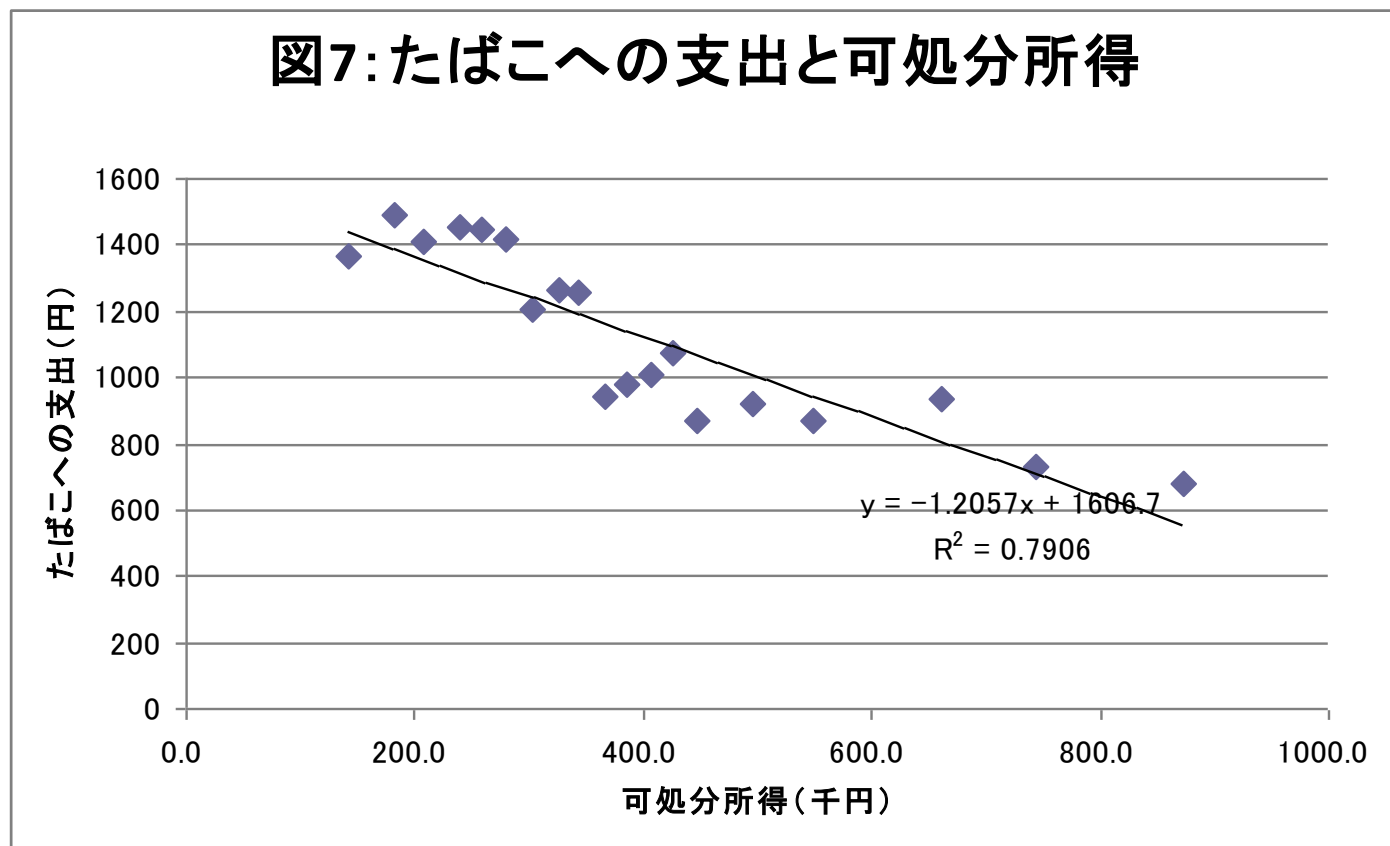
図6: 酒類への支出と可処分所得



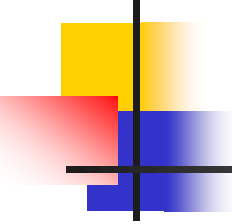
資料:総務省統計局「平成21年全国消費実態調査」表1

決定係数(7)

図7: たばこへの支出と可処分所得



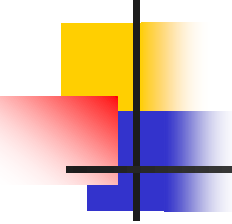
資料:総務省統計局「平成21年全国消費実態調査」表1



散布図・残差プロットの活用(1)

■ 散布図の活用

- 散布図に回帰直線を描き込む。
 - 観察点全体への回帰直線の当てはまり具合は適切か？
 - 直線による近似に無理がないか。
 - 無理があると判断できるようなら、変数変換などの対応策を講じる(次回)。

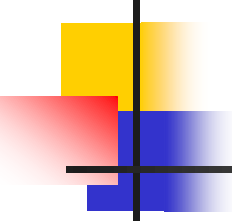


散布図・残差プロットの活用(2)

■ 残差プロットの活用

■ 残差プロットの例:

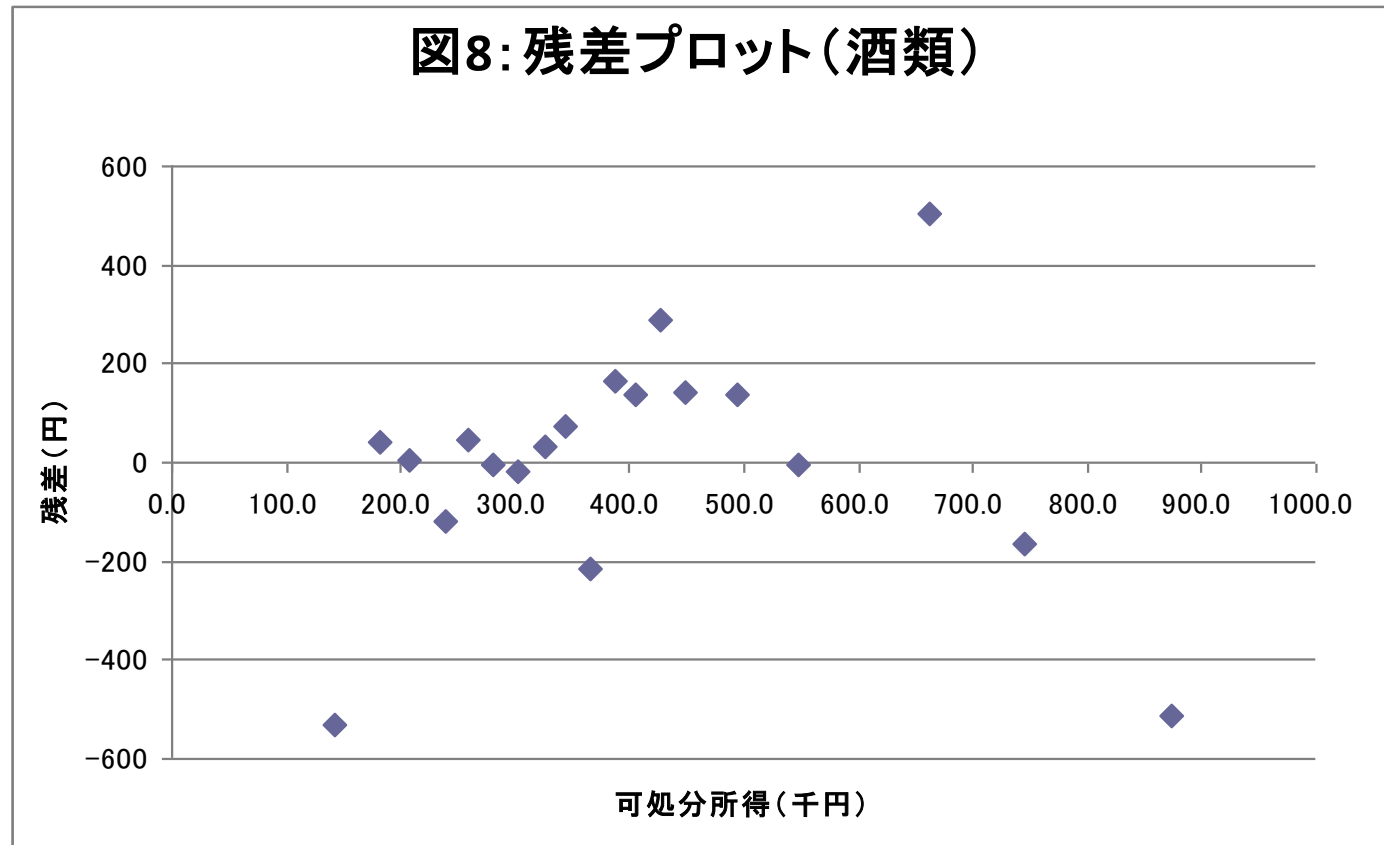
- (x_i, d_i) を座標平面にあらわしたもの。
- 説明要因 x_i の値を所与としたときに、観察値 y_i と当てはめられた値 $\hat{y}_i$ との乖離をグラフにしたもの。
- 何らかの規則性あり。→ 問題あり。
 - 読み取りにはコツがいる。



散布図・残差プロットの活用(3)

- 残差プロット(酒類)
 - 横軸: 可処分所得
 - 縦軸: 回帰式(酒類)からえた残差
- 残差プロット(たばこ)
 - 横軸: 可処分所得
 - 縦軸: 回帰式(たばこ)からえた残差

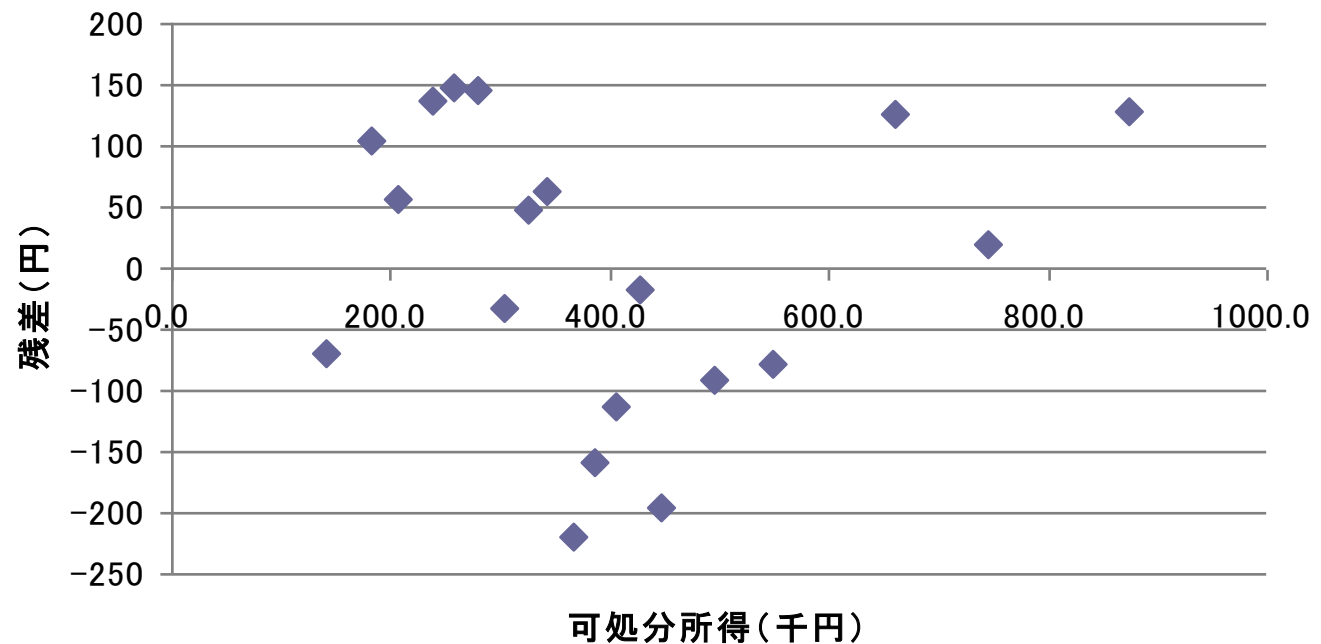
散布図・残差プロットの活用(4)



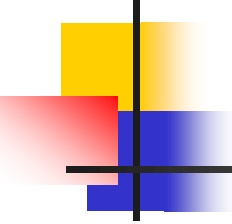
資料:総務省統計局「平成21年全国消費実態調査」表1

散布図・残差プロットの活用(5)

図9: 残差プロット(たばこ)

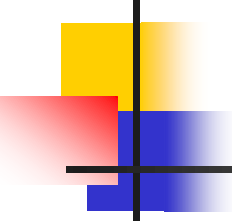


資料:総務省統計局「平成21年全国消費実態調査」表1



散布図・残差プロットの活用(6)

- 散布図・残差プロットによる吟味
 - 目視による判断なので主観的になりやすい。
 - しかし、決定係数の大小のみで当てはまりを判断するのは危険なので、必ず散布図・残差プロットも確認する必要がある。



PC実習

- 回帰直線の計算
 - 関数の利用
 - 分析ツールの利用
- 残差プロットの描画