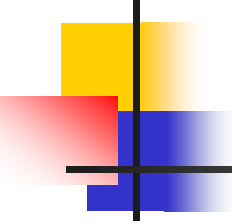


統計学入門 第11回

早稲田大学政治経済学部
西郷 浩



本日の目標

- 条件つき確率
- 乗法法則
- 事象の独立

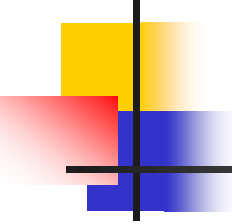
条件つき確率(1)

■ 条件つき確率

- サイコロをふたつ振る。
- A : 出目がふたつとも3以上
- B : 出目の和が7
- 「 A が生じた」という条件のもとで B が生じる確率は？

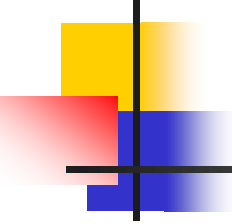
図1: 2つのサイコロの出目

	1	2	3	4	5	6
1						B
2						
3						
4						
5						
6						



条件つき確率(1)

- 条件つき確率の意味
 - 「 A が生じた」という条件のもとで:
 - 両方の目が3以上であるものに注目する。
 - 標本空間を A に限定して確率を評価する。
 - 前スライドの図1において、黄色の部分(A)だけに注目して、その中で、緑色の部分(B)が生起する確率を考える。

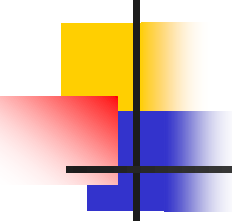


条件つき確率(2)

■ 条件つき確率の評価

■ $P(B|A)$:

- 「 A が生起した」という条件のもとで B が生起する確率
 - 標本空間を A に限定して確率を評価する。
- 「サイコロをふたつ振る試行においては、標本空間なかのすべての根元事象が等確率で生起する」ことに注意する。



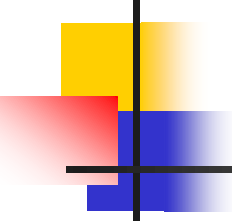
条件つき確率(3)

■ 条件事象

- 「 A が生起した」に対応する標本点の数:
 - 16(黄色の部分)

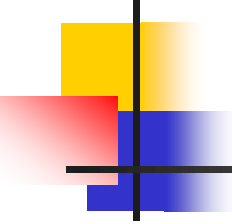
■ 評価対象の事象

- 「(標本空間を A に制限したときに) B が生起する」
=「 A と B が同時に生起する」に対応する標本点の数
 - 2(黄色の中の緑の部分)



条件つき確率(4)

- したがって、この例においては、
$$P(B | A) = 2/16 = 1/8$$
- 以上の議論をどのように一般化するか？



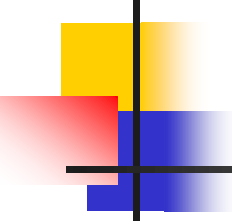
条件つき確率(5)

- 条件つき確率
$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- 例による確認:

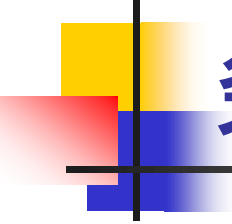
サイコロをふたつ振る試行において、条件つき確率は $1/8$ であった。上の公式で計算すると、

$$\begin{aligned} P(B|A) &= P(A \cap B) / P(A) \\ &= (2/36) / (16/36) = 2/16 = 1/8 \end{aligned}$$



条件つき確率(6)

- 条件つき確率と同時(積事象の)確率
 - 条件つき確率 $P(B | A)$ の意味:
 - 「 A が生じた」という状況で B が生じている確率
 - 同時確率 $P(A \cap B)$ の意味:
 - A と B とが同時に生じる確率
 - 類似点: 積事象 $A \cap B$ が評価対象。
 - 相違点: 考慮する標本空間の範囲



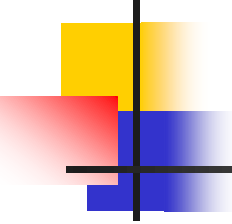
条件つき確率(7)

- (全)標本空間: Ω

- 例:サイコロをふたつ振る試行において、(全)標本空間は36個の単一事象から成る。
- $P(\Omega) = 1$ (標本空間に含まれるいずれかの事象が必ず生起する。)

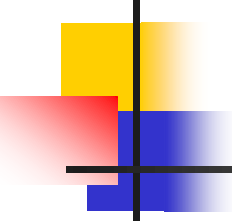
- 条件つき確率
$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- 同時確率
$$P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(\Omega)}$$



条件つき確率(8)

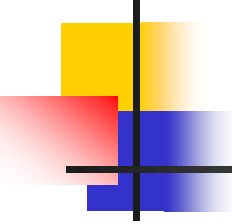
- 例：出席者から学生をひとり選ぶ。
 - A : 選ばれた学生が男性
 - B : 選ばれた学生が喫煙者
 - $P(A \cap B)$
= (出席者から男子喫煙者が選ばれる確率)
= (男子喫煙者数) $\div$ (全出席者)
 - $P(B|A)$
= (男子出席者から喫煙者が選ばれる確率)
= (男子喫煙者数) $\div$ (男子出席者)



条件つき確率(9)

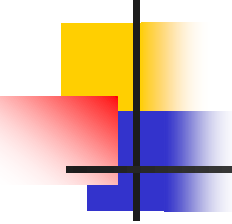
■ 例題

- サイコロを1つ振る。
 - A: 偶数の目が出る。
 - B: 4以上の目が出る。
 - $P(A|B) = ?$
 - $P(B|A) = ?$



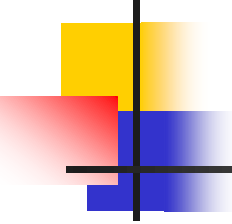
条件つき確率(10)

- サイコロを2つ振る。
 - A: 出目の和が偶数になる。
 - B: 出目の和が7より大きい。
 - $P(A|B) = ?$
 - $P(B|A) = ?$



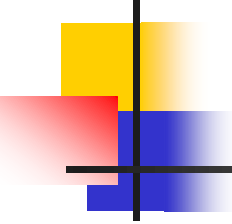
条件つき確率(11)

- トランプ(52枚、ジョーカーなし)から1枚を抜き取る。
 - A: キングを抜き取る。
 - B: ハートを抜き取る。
 - C: クイーンを抜き取る。
 - $P(A|B) = ?$
 - $P(B|A) = ?$
 - $P(A|C) = ?$
 - $P(C|B) = ?$



条件つき確率(12)

- トランプ(52枚、ジョーカーなし)から2枚を抜き取る(非復元)。
 - A: 1枚目にハートを抜き取る。
 - B: 2枚目にハートを抜き取る。
 - $P(A) = ?$
 - $P(B) = ?$
 - $P(B|A) = ?$
 - $P(A|B) = ?$

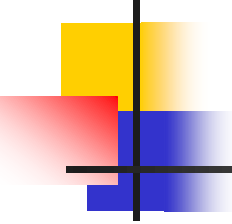


乗法法則(1)

- 乗法法則

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B)P(A | B) \\ &= P(A)P(B | A) \end{aligned}$$

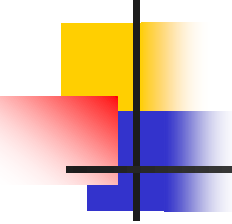
- 標本空間をうまく制限して、同時確率の計算を簡単にする。



乗法法則(2)

■ 誕生日問題

- 25人の中に、少なくとも2人の誕生日が同じである確率は？
 - 仮定：
 - 1年は365日
 - ある人の誕生日は、 $1/365$ の確率で1月1日、 $1/365$ の確率で1月2日、...、 $1/365$ の確率で12月31日になる。
 - ある人の誕生日と別の人の誕生日は独立に分布する。



乗法法則(3)

- 解法:

- 25人を1列に並べる。

- A_k :

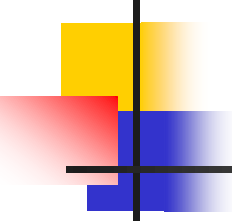
- 「先頭からk番目の人の誕生日が、先頭からk-1 番目の人の誕生日と異なる事象」

- 先頭の2人の誕生日が異なる事象:

- $A_1 \cap A_2$

- 先頭の2人の誕生日が異なる確率

- $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = 1 \times \frac{364}{365}$



乗法法則(4)

- 先頭の3人の誕生日が異なる事象

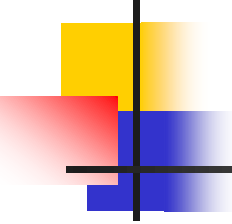
- $A_1 \cap A_2 \cap A_3$

- 先頭の3人の誕生日が異なる確率

- $$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1 \cap A_2)P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &= 1 \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \end{aligned}$$

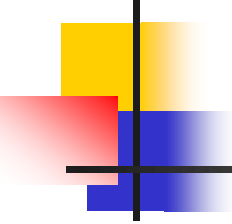
- 先頭の25人の誕生日が異なる確率

- $$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{25}) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_{25}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{24}) \\ &= 1 \times \frac{364}{365} \times \cdots \times \frac{341}{365} = 0.43 \dots \end{aligned}$$



乗法法則(5)

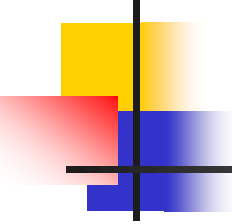
- 少なくとも2人の誕生日が同じである確率
= $1 - \text{全員の誕生日が異なる確率}$
 - $1 - 0.43 = 0.57$
 - 存外高い！
 - 25人から2人選ぶ組み合わせ = 300組



乗法法則(6)

■ 例題

- トランプ(52枚、ジョーカーなし)から2枚を抜き取る(非復元)
 - A: 1枚目にキングを抜き取る。
 - B: 2枚目にクイーンを抜き取る。
 - $P(A \cap B) = ?$
- トランプ(52枚、ジョーカーなし)から2枚を抜き取る(復元)
 - $P(A \cap B) = ?$



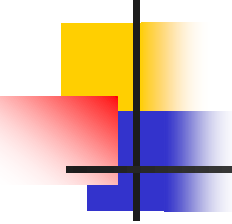
事象の独立(1)

- 独立性

- 事象 A と B が独立

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

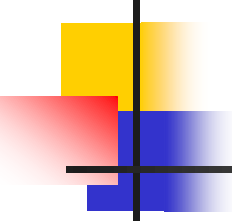
- 「事象 A の発生と事象 B の発生とが無関係である」の意。
 - 独立性は、上の条件の成否で確かめられる。
 - 「直観的に考えて明らかだ」は通用しない。



事象の独立(2)

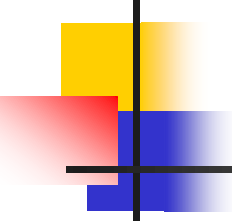
■ 例

- サイコロを1つ振る。
 - A: 出目が2の倍数
 - B: 出目が3の倍数
 - C: 出目が4の倍数
 - $P(A) = 3/6$; $P(A|B) = 1/2$; AとBは独立である。
 - $P(B) = 2/6$; $P(B|C) = 0$; BとCは独立でない。
 - $P(C) = 1/6$; $P(C|A) = 1/3$; CとAは独立でない。



事象の独立(3)

- サイコロを2つ振る。
 - A: 出目の和が2の倍数である。
 - B: 出目の和が3の倍数である。
 - C: 出目の和が4の倍数である。
 - $P(A) = ?$; $P(A|B) = ?$; AとBは独立?
 - $P(B) = ?$; $P(B|C) = ?$; BとCは独立?
 - $P(C) = ?$; $P(C|A) = ?$; CとAは独立?



事象の独立(4)

- トランプ(52枚、ジョーカーなし)を1枚抜取る。
 - A: キングを抜取る。
 - B: ハートを抜取る。
 - C: クイーンを抜取る。
 - $P(A) = ?$; $P(A|B) = ?$; AとBは独立?
 - $P(B) = ?$; $P(B|C) = ?$; BとCは独立?
 - $P(C) = ?$; $P(C|A) = ?$; CとAは独立?