

統計学I

早稲田大学政治経済学術院

西郷 浩

本日の目標

- 条件つき確率
- 乗法定理
- 事象の独立

条件つき確率(1)

- 条件つき確率
 - サイコロを2つ投げる。
 - A : 出目が2つとも3以上
 - B : 出目の和が7
 - 「 A が生じた」という条件のもとで B が生じる確率は？

図1: 2つのサイコロの出目

	1	2	3	4	5	6
1						B
2						
3				AB		
4						
5					A	
6						

条件つき確率(2)

- 条件つき確率の意味
 - 「 A が生じた」という条件のもとで:
 - 両方の目が3以上であるものに注目する。
 - 標本空間を A に限定して確率を評価する。
 - 前スライドの図1で、エンジ色の部分(A)だけに注目して、その中で、青色の部分(B)が生起する確率を考える。

条件つき確率(3)

- 条件つき確率の評価

- $P(B|A)$:

- 「 A が生じた」という条件のもとで B が生起する確率
 - 標本空間を A に限定して確率を評価する。
 - 「サイコロを2つ投げる試行においては、標本空間の中のすべての根元事象が等確率で生起する」ことに注意する。この条件が、標本空間を限定したときにも、成り立つと考える。

条件つき確率(4)

－条件事象

- 「 A が生起した」に対応する標本点の数:
 - － 16 (エンジ色の部分)

－評価対象の事象

- 「(標本空間を A に制限したときに) B が発生する」
= 「 A と B が同時に生起する」に対応する標本点の数
 - － 2 (エンジ色の中にある青の部分)

条件つき確率(5)

–したがって、この例においては、

$$P(B|A) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

–以上の議論をどのように一般化するか？

条件つき確率(6)

- 条件つき確率

- 次式によって定義する: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

- 例による確認:

- サイコロを2つ投げる試行において条件つき確率は $1/8$ であった。上の公式で計算すると、

- $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{(2/36)}{(16/36)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

条件つき確率(7)

- 条件つき確率と同時(積事象の)確率
 - 定義の比較
 - 条件つき確率 $P(B|A)$:
 - 「 A が生じた」という状況で B が生じている確率
 - 同時確率 $P(A \cap B)$ の意味:
 - A と B が同時に生じる確率
 - 類似点と相違点
 - 類似点: 積事象 $A \cap B$ が評価対象。
 - 相違点: 考慮する標本空間の範囲

条件つき確率(8)

- (全)標本空間: Ω
 - 例:サイコロをふたつ投げる試行において、(全)標本空間は36個の根元事象から成る。
 - $P(\Omega) = 1$ (標本空間に含まれるいずれかの事象が必ず生起する。)
- 条件つき確率

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- 同時確率

$$P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(\Omega)}$$

条件つき確率(9)

- 条件つき確率
 - サイコロを2つ投げる。
 - A : 出目が2つとも3以上
 - B : 出目の和が7
 - 「 A が生じた」という条件のもとで B が生じる確率は？

図1: 2つのサイコロの出目

	1	2	3	4	5	6
1						B
2						
3				AB		
4						
5					A	
6						

条件つき確率(10)

- 例：出席者から学生をひとり選ぶ。
 - A ：選ばれた学生が男性
 - B ：選ばれた学生が喫煙者
 - $P(B|A)$
=(男子出席者から喫煙者が選ばれる確率)
=(男子喫煙者数)÷(男子出席者)
 - $P(A \cap B)$
=(出席者から男子喫煙者が選ばれる確率)
=(男子喫煙者数)÷(全出席者)

条件つき確率の例(1)

- サイコロを2つ投げる。
 - A : 出目の和が偶数になる。
 - B : 出目の和が7より大きい。
 - $P(A|B) = ?$
 - $P(B|A) = ?$

条件つき確率の例(2)

- サイコロを2つ投げる。
- A : 出目の和が偶数になる。
 - B : 出目の和が7より大きい。
 - $P(A|B) = \frac{(9/36)}{(15/36)} = \frac{3}{5}$
 - $P(B|A) = \frac{(9/36)}{(18/36)} = \frac{1}{2}$

図2: 2つのサイコロの出目

	1	2	3	4	5	6
1						
2		A				
3						
4				AB	B	
5						
6						

条件つき確率の例(3)

— トランプ(52枚、ジョーカーなし)から1枚を抜取る。

- A : キングを抜取る。
- B : ハートを抜取る。
- C : クイーンを抜取る。
- $P(A|B) = ?$
- $P(B|C) = ?$
- $P(C|A) = ?$

条件つき確率の例(4)

— トランプ(52枚、ジョーカーなし)から1枚を抜取る。

- A : キングを抜取る。
- B : ハートを抜取る。
- C : クイーンを抜取る。

$$\bullet P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{(1/52)}{(13/52)} = \frac{1}{13}$$

$$\bullet P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{(1/52)}{(4/52)} = \frac{1}{4}$$

$$\bullet P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{(0/52)}{(4/52)} = 0$$

条件つき確率の例(5)

— トランプ(52枚、ジョーカーなし)から2枚を抜取る(非復元)。

- A: 1枚目にハートを抜取る。
- B: 2枚目にハートを抜取る。
- $P(A) = ?$
- $P(B|A) = ?$
- $P(B) = ?$
- $P(A|B) = ?$

条件つき確率の例(6)

— トランプ(52枚、ジョーカーなし)から2枚を抜取る(非復元)。

- A : 1枚目=ハートを抜取る。
- B : 2枚目にハートを抜取る。

- $P(A) = \frac{13}{52}$

- $P(B|A) = \frac{\frac{13}{52} \times \frac{12}{51}}{(13/52)} = \frac{12}{51}$

条件つき確率の例(7)

- $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} + \frac{39}{52} \times \frac{13}{51} = \frac{13}{52}$
- $P(A|B) = \frac{\frac{13}{52} \times \frac{12}{51}}{(13/52)} = \frac{12}{51}$

乗法定理(1)

- 乗法定理

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(B)P(A | B) \\ &= P(A)P(B | A)\end{aligned}$$

- 標本空間をうまく制限して、同時確率の計算を簡単にする。

乗法定理(2)

- 誕生日問題

- 25人の中に、少なくとも2人の誕生日が同じである確率は？

- 仮定:

- 1年は365日ある。
 - ある人の誕生日は、等しい確率で365日のうちの1日になる。
 - ある人の誕生日と別の人の誕生日は独立である。

乗法定理(3)

－ 解法：

- 25人を1列に並べる。
- A_k ：
 - －「先頭から k 番目の人の誕生日が、先頭から $k - 1$ 番目の人の誕生日と異なる事象」
 - » $P(A_1) = 1$ と決める。
- 先頭の2人の誕生日が異なる事象：
 - － $A_1 \cap A_2$
- 先頭の2人の誕生日が異なる確率
 - － $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = 1 \times \frac{364}{365}$

乗法定理(4)

- 先頭の3人の誕生日が異なる事象
 - $A_1 \cap A_2 \cap A_3$
- 先頭の3人の誕生日が異なる確率
 - $$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1 \cap A_2)P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &= 1 \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \end{aligned}$$
- 先頭の25人の誕生日が異なる確率
 - $$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{25}) &= P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_{25}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{24}) \\ &= 1 \times \frac{364}{365} \times \cdots \times \frac{341}{365} = 0.43 \dots \end{aligned}$$

乗法定理(5)

- 少なくとも2人の誕生日が同じである確率
= $1 - \text{全員の誕生日が異なる確率}$
 - $1 - 0.43 = 0.57$
 - » 意外と高い。
 - » 25人から2人選ぶ組み合わせ = 300組

乗法定理(6)

- 例題

- トランプ(52枚、ジョーカーなし)から2枚を抜き取る(非復元)

- A : 1枚目にキングを抜き取る。
 - B : 2枚目にクイーンを抜き取る。
 - $P(A \cap B) = ?$

- トランプ(52枚、ジョーカーなし)から2枚を抜き取る(復元)

- $P(A \cap B) = ?$

乗法定理(7)

- 例題

- トランプ(52枚、ジョーカーなし)から2枚を抜取る(非復元)

- A : 1枚目にキングを抜取る。
 - B : 2枚目にクイーンを抜取る。

- $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{4}{52} \times \frac{4}{51} = \frac{4}{663}$

- トランプ(52枚、ジョーカーなし)から2枚を抜取る(復元)

- $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$

事象の独立(1)

- 独立性
 - 事象 A と B が独立

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

- 「事象 A の発生と事象 B の発生とが無関係である」の意。
- 独立性は、上の条件の成否で確かめられる。
 - 「直観的に考えて明らかだ」は通用しない。

事象の独立(2)

- 例

- サイコロを1つ投げる。

- A : 出目が2の倍数

- B : 出目が3の倍数

- C : 出目が4の倍数

- $P(A) = \frac{3}{6}; P(A|B) = \frac{1}{2}; A$ と B は独立である。

- $P(B) = \frac{2}{6}; P(B|C) = 0; B$ と C は独立でない。

- $P(C) = \frac{1}{6}; P(C|A) = \frac{1}{3}; A$ と C は独立でない。

事象の独立(3)

- サイコロを2つ投げる。
 - A : 出目の和が2の倍数である。
 - B : 出目の和が3の倍数である。
 - C : 出目の和が4の倍数である。
 - $P(A) = ?; P(A|B) = ?; A$ と B は独立？
 - $P(B) = ?; P(B|C) = ?; B$ と C は独立？
 - $P(C) = ?; P(C|A) = ?; A$ と C は独立？

事象の独立(4)

– サイコロを2つ投げる。

- A : 出目の和が2の倍数である。
- B : 出目の和が3の倍数である。
- C : 出目の和が4の倍数である。
- $P(A) = \frac{18}{36}; P(A|B) = \frac{(6/36)}{(12/36)}$; A と B は独立である。
- $P(B) = \frac{12}{36}; P(B|C) = \frac{(1/36)}{(9/36)}$; B と C は独立でない。
- $P(C) = \frac{9}{36}; P(C|A) = \frac{(9/36)}{(18/36)}$; A と C は独立でない。