

統計学I

早稲田大学政治経済学術院

西郷 浩

本日の目標

- Bayes の定理
 - 3枚のコインの問題
 - Bayes の定理
 - Bayes の定理の応用

3枚のコインの問題(1)

- 箱の中に、3枚のコインがある
 - HH(両面とも表の刻印)
 - HT(片面に表、もう片面に裏の刻印)
 - TT(両面とも裏の刻印)
- 箱をよく振ってから、どのコインが取られたかを分らないようにして1枚を取り出し、机の上に置いたら表の刻印であった。
- 取り出したコインがHHである確率は？

3枚のコインの問題(2)

- よくある誤答
 - コインは3種類ある。
 - TTでないことは確実だ。
 - 残るは HH と HT の2種類である。
 - どちらのコインも五分五分で取り出された。
 - でたために取っているのだから、
 - したがって、HHである確率は $1/2$ だ。

3枚のコインの問題(3)

- Bayesの定理による解答
 - 記号
 - $H_1 = \{\text{取り出したコインがHH}\}$
 - $H_2 = \{\text{取り出したコインがHT}\}$
 - $H_3 = \{\text{取り出したコインがTT}\}$
 - $A = \{\text{片面が表の刻印}\}$

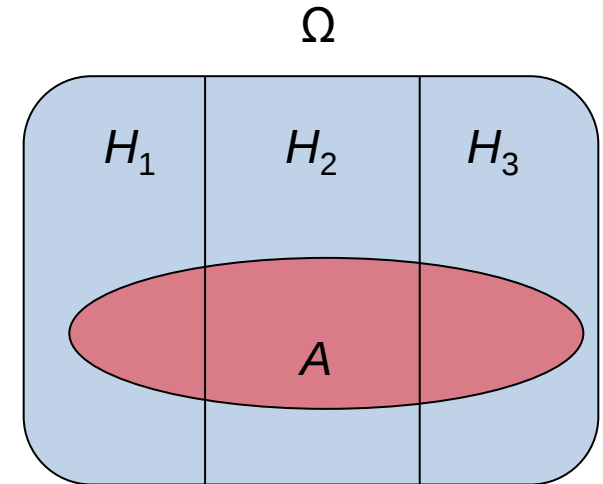
3枚のコインの問題(3)

– 利用可能な条件

- $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$
(どのコインも同じ確率で取り出される)
- 条件つき確率
 - $P(A|H_1) = 1$ (HH を取ったら、表の出る確率1)
 - $P(A|H_2) = \frac{1}{2}$ (HT を取ったら、表の出る確率1/2)
 - $P(A|H_3) = 0$ (TT を取ったら、表の出る確率0)

3枚のコインの問題(4)

$$\begin{aligned} P(H_1 | A) &= \frac{P(H_1 \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(H_1 \cap A)}{P((H_1 \cap A) \cup (H_2 \cap A) \cup (H_3 \cap A))} \\ &= \frac{P(H_1 \cap A)}{P(H_1 \cap A) + P(H_2 \cap A) + P(H_3 \cap A)} \\ &= \frac{P(H_1)P(A | H_1)}{P(H_1)P(A | H_1) + P(H_2)P(A | H_2) + P(H_3)P(A | H_3)} \end{aligned}$$



3枚のコインの問題(5)

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Bayesの定理(1)

- Bayes の定理

- 前提:

- 標本空間が $H_1, H_2, \dots, H_k$ に分割されている。

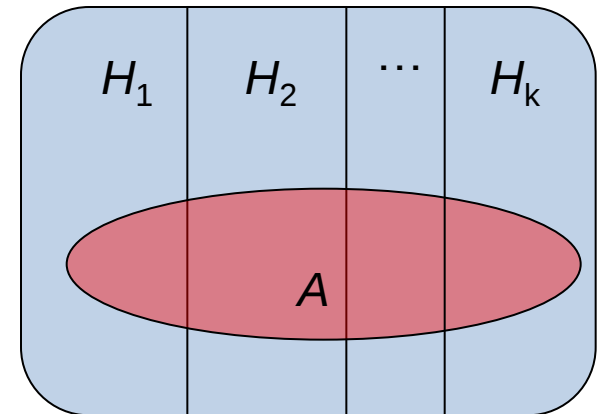
- つまり: $H_i \cap H_j = \emptyset$ ($i \neq j$) かつ $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_k$

- $P(H_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) が既知

- $P(A|H_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) が既知

- このとき

- $$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^k P(H_j)P(A|H_j)}$$



Bayesの定理(2)

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(H_i \cap A)}{P((H_1 \cap A) \cup (H_2 \cap A) \cup \dots \cup (H_k \cap A))} \\ &= \frac{P(H_i \cap A)}{\sum_{j=1}^k P(H_j \cap A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^k P(H_j)P(A|H_j)}\end{aligned}$$

Bayesの定理(3)

- Bayesの定理の有用性
 - H_i : 原因となるような事象
 - A : 結果となるような事象
 - 3つの条件 (満たされる場合が少なくない)
 - 原因がすべてわかっている。
 - おのおのの原因がどの程度の可能性で発生するかは既知。
 - 原因 H_i のもとで、結果 A がどの程度の可能性で発生するかも既知。

Bayesの定理(4)

- これらの条件がそろえば、結果 A の発生を与件として原因 H_i の発生確率を数値的に評価できる。
 - 結果から原因について判断できる。
- $P(H_i)$ (事前確率) を観察された事実 A によって、あらたな値 $P(H_i|A)$ (事後確率) へと更新する、とも読める。
 - $$\begin{array}{ccccc} P(H_i) & \rightarrow & P(H_i|A) & \rightarrow & P(H_i|A \cap B) \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ A & & B & & \end{array}$$

Bayes の定理の応用(1)

- ある大学の入学試験
 - 模試の判定がAであったら
 - 合格率95%
 - 模試の判定がそれ以外であったら
 - 合格率30%
 - 入試の受験者における模試判定の人数比
 - A: それ以外 = 10:90

Bayes の定理の応用(2)

- 問題:
 - 合格者のうち、模試の判定がAであるものの割合(確率)は？
- 記号の整理:
 - H_1 : 受験者の模試の判定がAである。
 - H_2 : 受験者の模試の判定がA以外である。
 - D : 入学試験に合格する。
 - 求めるべき確率: $P(H_1|D)$

Bayes の定理の応用(3)

- あたえられた条件の整理

- $P(H_1) = 0.1; P(H_2) = 0.9$

- $P(D|H_1) = 0.95; P(D|H_2) = 0.3$

- Bayes の定理の適用

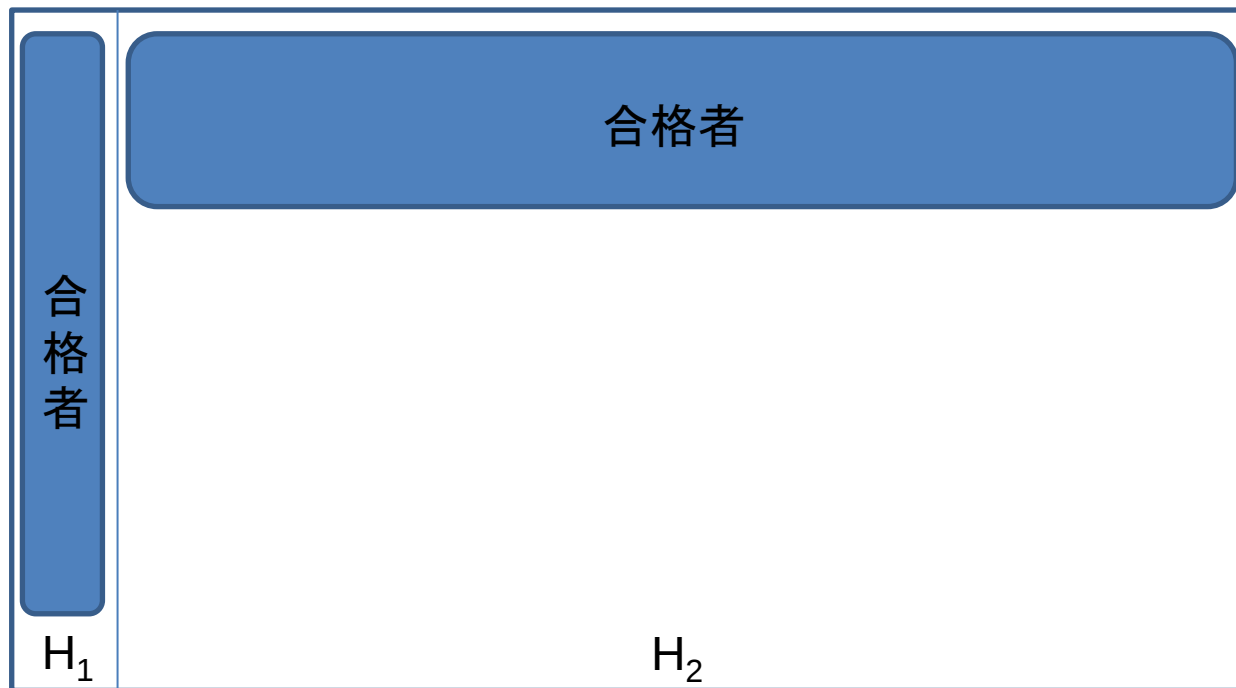
- $$P(H_1|D) = \frac{P(H_1)P(D|H_1)}{P(H_1)P(D|H_1)+P(H_2)P(D|H_2)}$$
$$= \frac{0.1 \times 0.95}{0.1 \times 0.95 + 0.9 \times 0.3} = 0.26$$

Bayes の定理の応用(4)

- 直感と違う？
 - A判定者なら合格率95%なら、合格者に占めるA判定者の割合がもっと高いはずだ。
 - 入試の合否は、A判定者を見つけるうえで、一定の効果はある。
 - $P(H_1) = 0.1; P(H_1|D) = 0.26$
 - なぜ、想像以上に低いと感じるのか。
 - 「A判定者以外の数が圧倒的に多い」ことが理由。

Bayes の定理の応用(5)

Ω (受験者全員)



Bayes の定理の応用(6)

- 3つのドアの問題 (Let's make a deal)
 - 閉じられたドアが3つある。
 - そのうちの1つの裏には車、残りの2つの裏にはヤギが隠されている。
 - 回答者(あなた)は自分が選んだドアの裏に隠してあるものをもらえる。

Bayes の定理の応用(7)

- 回答者(あなた)が1番のドアを選んだ。
- 司会者が3番のドアを開けて、ヤギが入っていることを回答者に見せた。
 - 司会者は車を隠してあるドアを知っている。
 - 車の隠してあるドアは絶対に開けない。
- 司会者いわく:「1番のドアから2番のドアに変えてもいいですけども、変えますか？」
- 回答者(あなた)はドアを変えるべきか？

Bayes の定理の応用(8)

－ 記号の整理

- H_1 : 1番目のドアの後ろに車がある。
- H_2 : 2番目のドアの後ろに車がある。
- H_3 : 3番目のドアの後ろに車がある。
- A : 司会者が3番目のドアを開ける。

－ 確率に関する想定

- 事前確率

$$- P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$$

» 回答者は、どのドアの後ろに車があるか知らないので、
ドアを無作為に選ぶ。

Bayes の定理の応用(9)

- 条件つき確率

- $P(A|H_1) = \frac{1}{2}$

- » 1番目のドアの後ろに車があるとき、司会者の開けるドアが2つ(2番目と3番目)あるので、司会者はどちらかのドアを無作為に開く。

- $P(A|H_2) = 1$

- » 2番目のドアの後ろに車があるとき、司会者の開けるドアが3番目しかないので、司会者は必ず3番目のドアを開ける。

- $P(A|H_3) = 0$

- » 3番目のドアの後ろに車があるとき、司会者は絶対に3番目のドアを開けない。

Bayes の定理の応用(10)

$$P(H_1 | A) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{1}{3}$$

$$P(H_2 | A) = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{2}{3}$$

$$P(H_3 | A) = \frac{\frac{1}{3} \times 0}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0} = 0$$