

統計学I

早稲田大学政治経済学術院

西郷 浩

本日の目標

- 確率変数
 - 確率変数とは
 - 確率変数の例
- 確率変数の性質
 - 確率変数の確率分布
 - 確率変数の期待値
 - 確率変数の分散

確率変数とは

- 確率変数: X
 - 試行: 偶然によって結果が定まる。
 - 例: サイコロを1つ投げる。
 - 起こりうる結果:
1の目が出る、2の目が出る、...、6の目が出る。
 - 確率変数: 試行の結果によって値が定まる。
 - 例: サイコロを1つ投げるとき、
 - $X = 1$ (もし出目が偶数なら); 0 (それ以外するとき)
 - $X =$ (出目の2倍)

確率変数の例

- 確率変数の分類

- 離散型確率変数

- $X = (\text{サイコロの出目})$
 - $X = (\text{一定時間内にかかってくる電話の回数})$
 - $X = (\text{最初に表が出るまでのコインの回数})$

- 連続型確率変数

- $X = (100\text{メートル走のタイム})$
 - $X = (\text{ソフトボールの遠投の飛距離})$

確率変数の確率分布(1)

- 離散型確率変数の確率関数

- $p_X(x) = P(X = x)$

- 例1: $X = (\text{1つのサイコロを投げた時の出目})$

- $p_X(1) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$

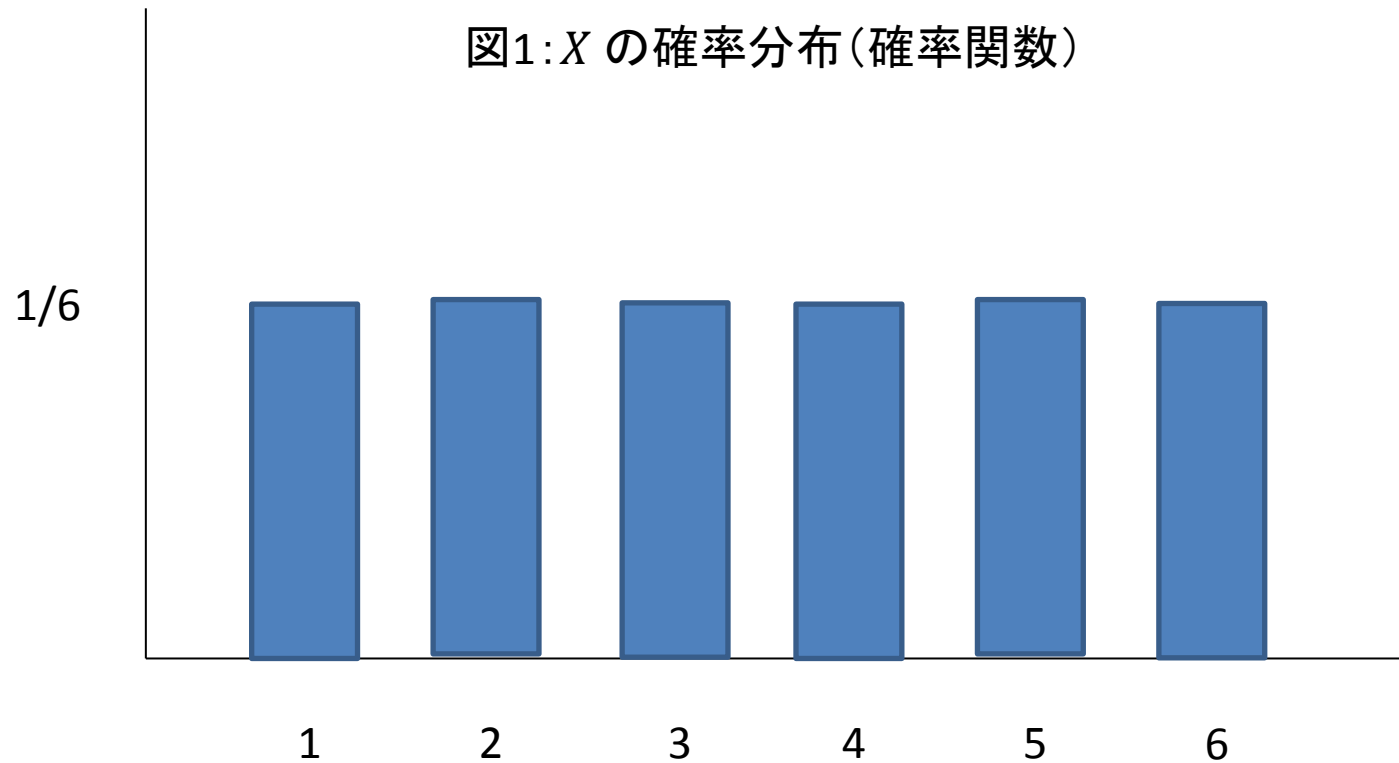
- $p_X(2) = P(X = 2) = \frac{1}{6}$

- ...

- $p_X(6) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$

確率変数の確率分布(2)

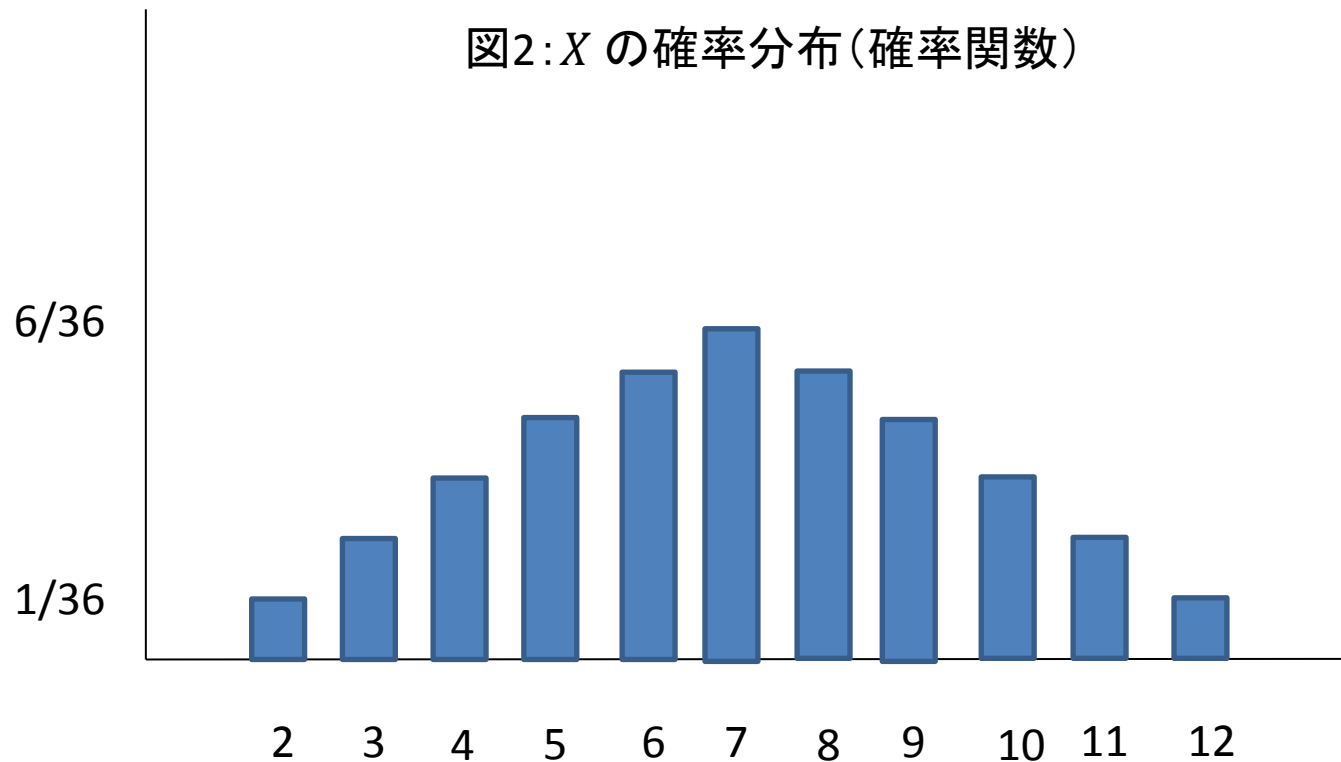
図1: X の確率分布(確率関数)



確率変数の確率分布(3)

- 例2: $X = (\text{サイコロを2つ投げたときの出目の和})$
 - $p_X(2) = P(X = 2) = \frac{1}{36}$
 - $p_X(3) = P(X = 3) = \frac{2}{36}$
 - ...
 - $p_X(7) = P(X = 7) = \frac{6}{36}$
 - $p_X(8) = P(X = 8) = \frac{5}{36}$
 - ...
 - $p_X(12) = P(X = 12) = \frac{1}{36}$

確率変数の確率分布(4)



確率変数の確率分布(5)

- 連続型確率変数の確率密度関数

- $f_X(x)$: つぎのような性質をもつ関数。

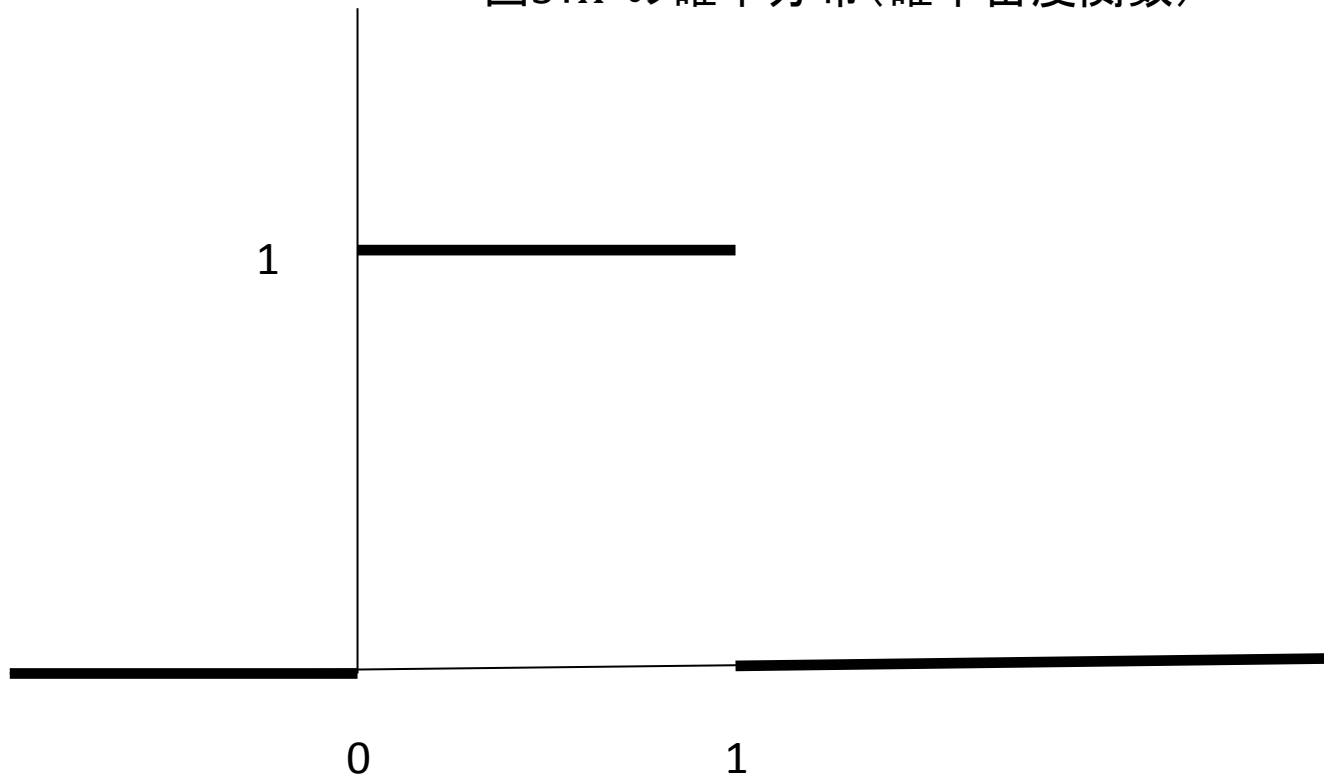
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

- 例: X が、0と1の間で一様に出やすい確率変数であるときの確率密度関数

$$- f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases}$$

確率変数の確率分布(6)

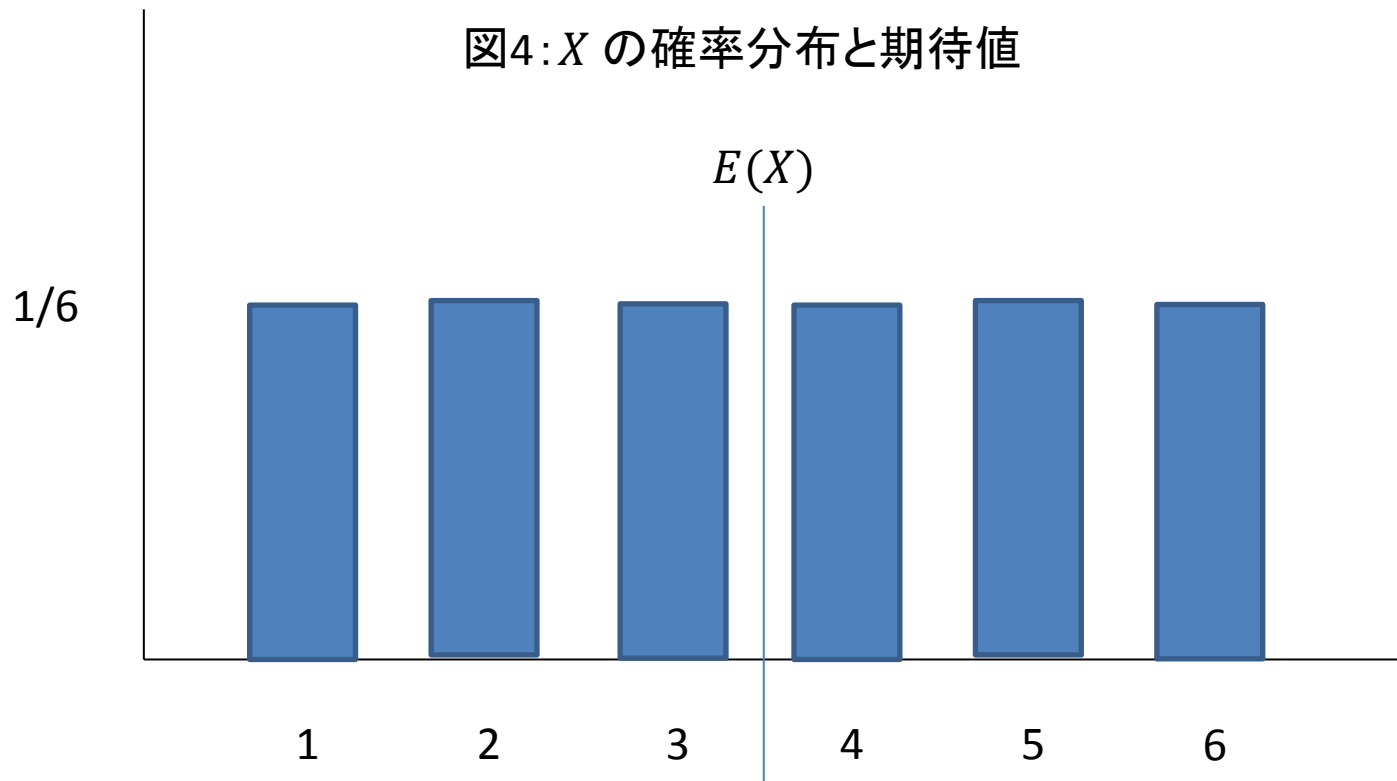
図3: X の確率分布(確率密度関数)



確率変数の期待値(1)

- 期待値: 確率変数の平均的な値
 - 離散型確率変数: $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots$
 - 例: $X = (\text{1つのサイコロを投げた時の出目})$
 - $E(X) = (1/6) \times 1 + (1/6) \times 2 + (1/6) \times 3$
 $+ (1/6) \times 4 + (1/6) \times 5 + (1/6) \times 6$
 $= 7/2$
 - 1つのサイコロを60,000回投げたとする。およそ10,000回1がでて、およそ10,000回2が出て、...、およそ10,000回6が出るであろう。したがって、出目の算術平均が期待値におおよそ等しくなる。

確率変数の期待値(2)

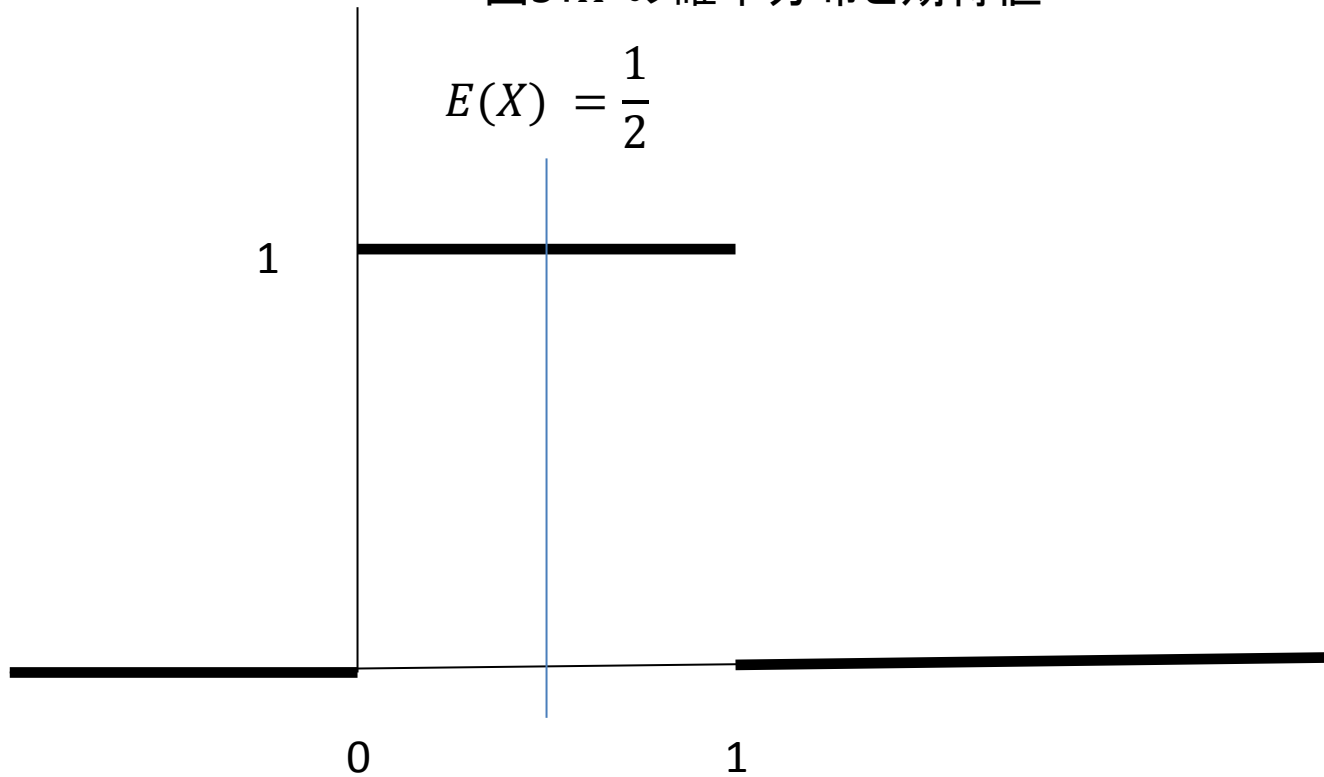


確率変数の期待値(3)

- 連続型確率変数: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$
 - 例: X が、0と1の間で一様に出やすい確率変数
 - $E(X) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$
 - 0から1までの値が一様に発生する。したがって、実際に X を10,000回発生させると、0から1までの値がまんべんなく発生するだろう。その算術平均は1/2におおよそ等しくなる。

確率変数の期待値(4)

図5: X の確率分布と期待値



確率変数の分散(1)

- 分散: 確率変数の平均的な散らばり

- 離散型確率変数:

- $V(X) = p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + \dots$

- ただし、 $\mu = E(X)$

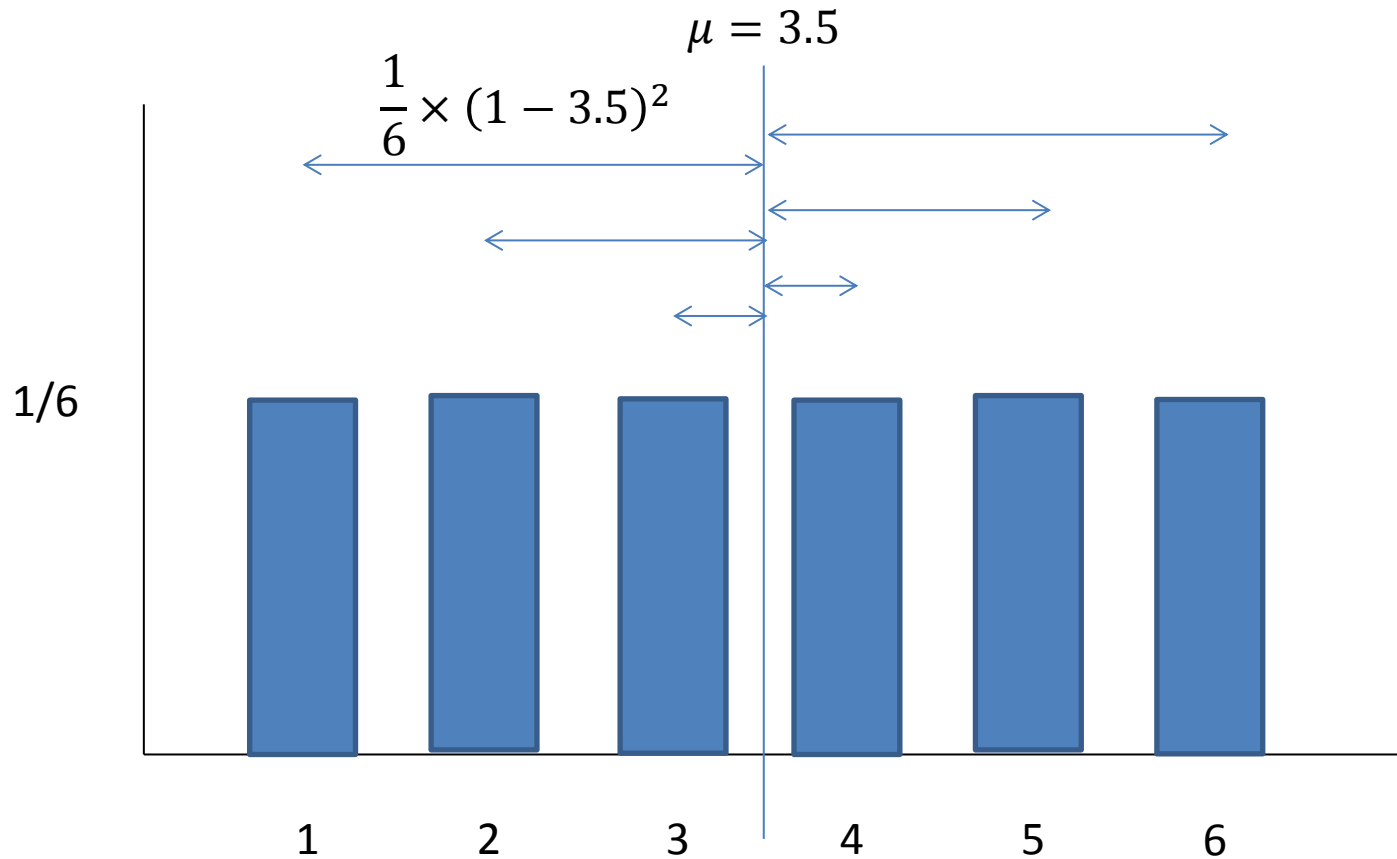
- 例: $X = (\text{1つのサイコロを投げた時の出目})$

- $$\begin{aligned} V(X) &= (1/6) \times (1 - 7/2)^2 + (1/6) \times (2 - 7/2)^2 \\ &\quad + (1/6) \times (3 - 7/2)^2 + (1/6) \times (4 - 7/2)^2 \\ &\quad + (1/6) \times (5 - 7/2)^2 + (1/6) \times (6 - 7/2)^2 \\ &= 35/12 \end{aligned}$$

- 分散をあらわす記号: $\sigma^2 = V(X)$

確率変数の分散(2)

図5: X の確率分布と分散



確率変数の分散(3)

– 連続型確率変数:

- $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx$

- ただし、 $\mu = E(X)$

- 例: X が、0と1の間で一様に出やすい確率変数

- $V(X) = \int_0^1 (x - 1/2)^2 dx = 1/12$

期待値の性質(1)

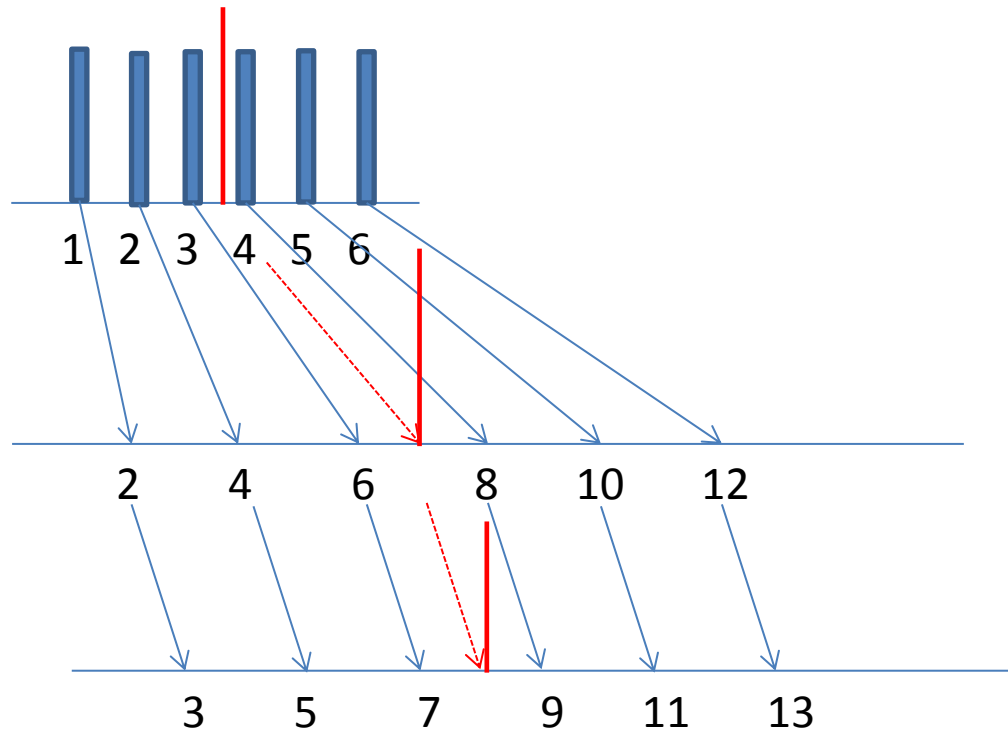
- 直線による新しい確率変数
 - $Y = a + bX$ ただし、 a と b は定数。
 - 例: $X =$ (1つのサイコロを投げた時の出目)
 - $Y = 1 + 2X$
 - $E(Y) = a + bE(X)$
 - 例: $E(Y) = 1 + 2 \times (7/2) = 8$
 - Y の確率分布を求めて定義式どおりに計算しなくても、 X の期待値から Y の期待値を直接計算できる。

期待値の性質(2)

－図による説明

- $X \rightarrow 2X \rightarrow 1 + 2X$

- (1)



- (3)

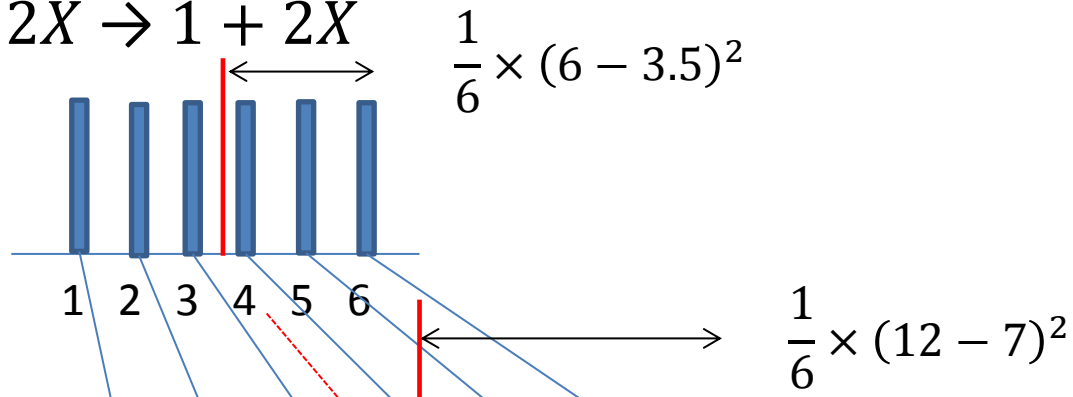
分散の性質(1)

- 直線による新しい確率変数
 - $Y = a + bX$ ただし、 a と b は定数。
 - 例: $X = (\text{1つのサイコロを投げた時の出目})$
 - $Y = 1 + 2X$
 - $V(Y) = b^2 V(X)$
 - 例: $V(Y) = 2^2 \times (35/12) = 35/3$
 - Y の確率分布を求めて定義式どおりに計算しなくても、 X の分散から Y の分散を直接計算できる。

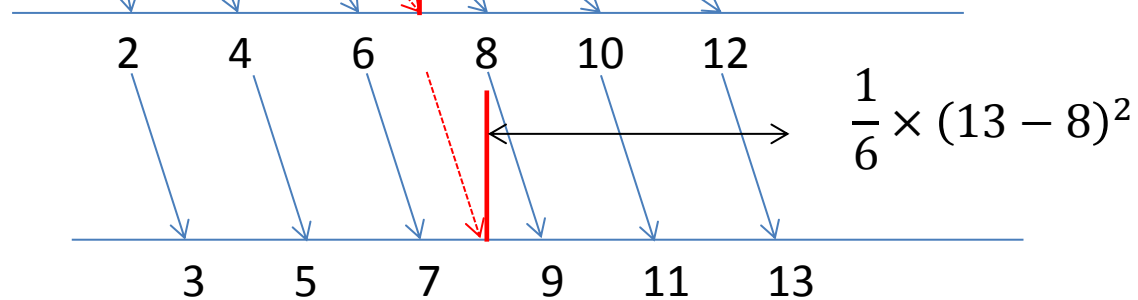
分散の性質(2)

－図による説明

- $X \rightarrow 2X \rightarrow 1 + 2X$
- (1)



- (2)
- (3)



確率変数の標準化

- 直線による変換によって、確率変数の期待値と分散を、それぞれ、0, 1に変更する。

$$- Z = \frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- 標準偏差: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

– 例: $X = (\text{1つのサイコロを投げた時の出目})$

- $Z = \frac{X - 7/2}{\sqrt{35/12}}$

– Z の期待値と分散が、それぞれ、0, 1 になることを確かめよ。

練習問題

- 問題1:
 - コインを1つ投げる。 X を表が出たら1、そうでないとき0となる確率変数とする。 X の確率関数と期待値、分散を求めなさい。
- 問題2:
 - $X = (\text{1つのサイコロを投げた時の出目})$ とする。このとき、 $Y = 1 + 2X$ の確率関数を求めなさい。確率関数から Y の期待値と分散を求めなさい。

解答：問題1

- $E(X) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$
- $V(X) = \frac{1}{2} \times \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

解答：問題2

表1: XとYの確率分布

X	1	2	3	4	5	6
確率	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
Y	3	5	7	9	11	13

$$E(Y) = \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 7 + \frac{1}{6} \times 9 + \frac{1}{6} \times 11 + \frac{1}{6} \times 13 = 8 = 1 + 2E(X)$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= \frac{1}{6} \times (3 - 8)^2 + \frac{1}{6} \times (5 - 8)^2 + \frac{1}{6} \times (7 - 8)^2 + \frac{1}{6} \times (9 - 8)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \times (11 - 8)^2 + \frac{1}{6} \times (13 - 8)^2 = \frac{35}{3} = 2^2 V(X) \end{aligned}$$

確率変数の期待値と (確率変数の)観察値の算術平均

- 観察値の算術平均→確率変数の期待値
 - 大数の法則
 - サイコロの出目の期待値=3.5
 - サイコロを多数回投げて計算した算術平均→3.5

確率変数の分散と (確率変数の)観察値の分散

- 観察値の分散→確率変数の分散
 - 大数の法則
 - サイコロの出目の分散= $35/12$
 - サイコロを多数回投げて計算した分散→ $35/12$