

# 統計学II

早稲田大学政治経済学術院

西郷 浩

# 本日の目標

- 区間推定
  - 信頼係数(信頼水準)
- 母平均の区間推定
- 母比率(成功確率)の区間推定

# 利用データについて

- JGSS2010年
  - 抽出実験に用いたデータは、東京大学社会科学研究所付属社会調査・データアーカイブ研究センターSSJデータアーカイブのリモート集計システムを利用し、同データアーカイブが所蔵する[JGSS2010]の個票をデータを集計したものである。

# 区間推定

- 区間推定

- 所与の水準以上の確率で母数を含む区間を構成する。

- 例:

- 母平均の区間推定

- $P(L \leq \mu \leq U) \geq 0.95$

- »  $L$ : 下限(標本から求める確率変数)

- »  $U$ : 上限(標本から求める確率変数)

- このような条件を満たす区間  $[L, U]$  を信頼係数0.95の信頼区間(区間推定値)とよぶ。

- 目標

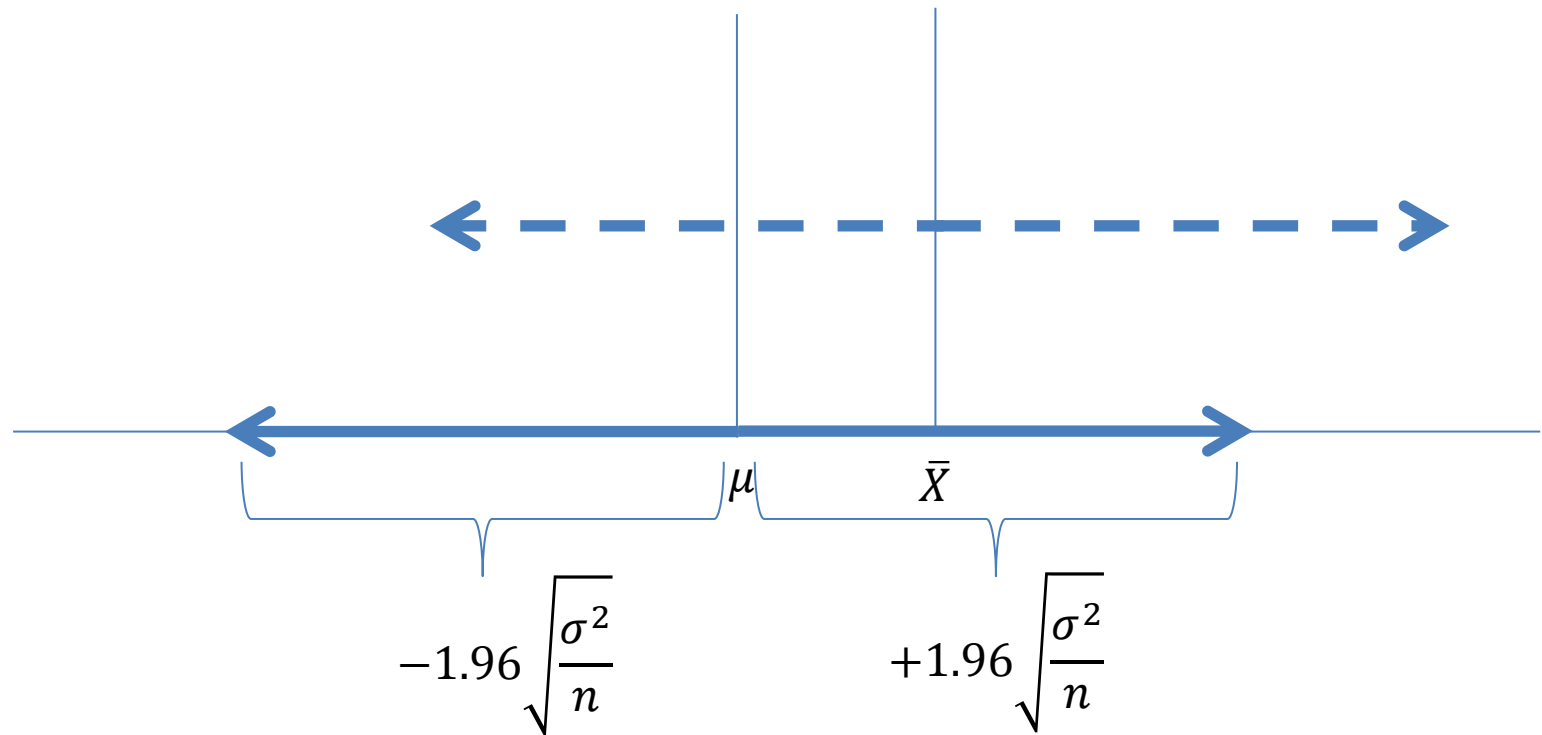
- 信頼係数を高く保ちつつ、幅の狭い区間を構成する。

# 母平均の区間推定(1)

- 信頼区間の構成
  - 標本:  $X_i \sim iid (\mu, \sigma^2)$
  - 中心極限定理:  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \rightarrow_d N(0, 1)$
  - 中心極限定理から導かれる性質
    - $P\left(-1.96 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq 1.96\right) \approx 0.95$
  - カッコ内を同値(内容が同等)の式に変形する。
    - $P\left(\mu - 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \bar{X} \leq \mu + 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) \approx 0.95$
    - $P\left(\bar{X} - 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) \approx 0.95$
- 信頼区間の構成まであともう一步。

# 母平均の区間推定(2)

図1:  $\mu \pm 1.96\sqrt{\sigma^2/n}$  と  $\bar{X} \pm 1.96\sqrt{\sigma^2/n}$  との関係



# 母平均の区間推定(3)

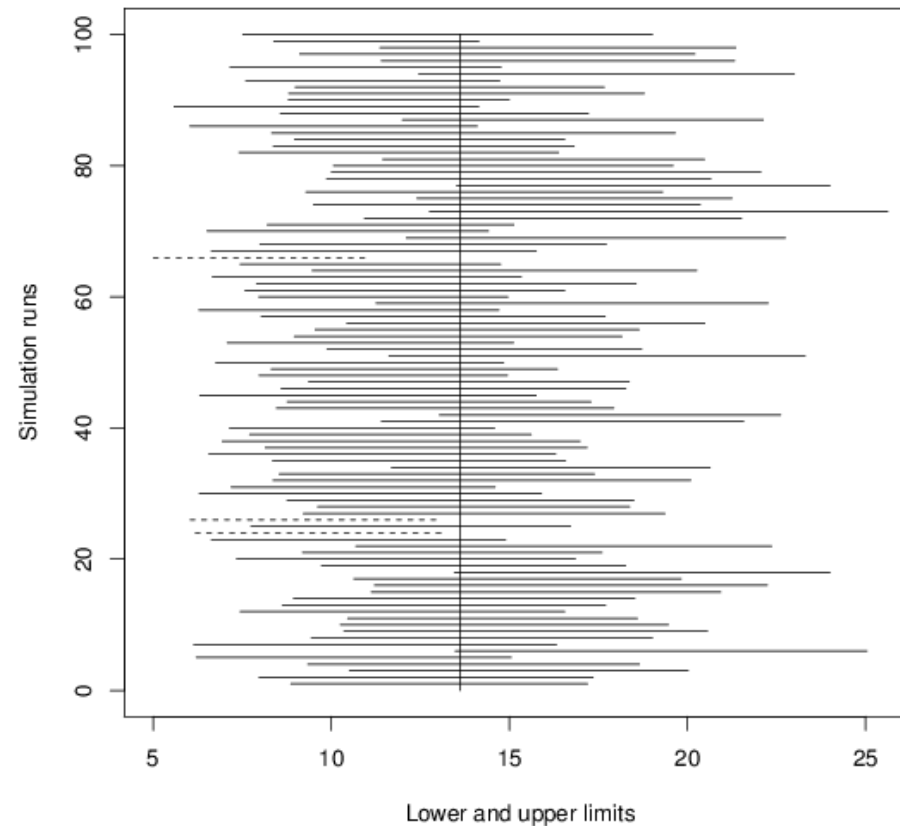
- 未知母数  $\sigma^2$  の処理
  - 標本推定量(標本不偏分散)で置き換える。
    - $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 
      - 不偏性  $E(S^2) = \sigma^2$  をもつ。
      - $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  とすると、 $E(\tilde{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 < \sigma^2$  となり、平均的に過小推定。
  - 標本の大きさ  $n$  が大きければ、母分散  $\sigma^2$  を標本不偏分散で置き換えても、捕捉確率がそれほど変わらないことが知られている。
    - $P\left(\bar{X} - 1.96\sqrt{\frac{S^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right) \approx 0.95$
- 信頼係数0.95の母平均  $\mu$  についての信頼区間(区間推定値)
  - $\left[\bar{X} - 1.96\sqrt{S^2/n}, \bar{X} + 1.96\sqrt{S^2/n}\right]$

# 母平均の区間推定(4)

- 例:
  - 就労年数データ(p. 128)  $\mu = 13.6$ 
    - 大きさ  $n = 30$  の標本を抽出
    - 4, 7, 7, 1, 10, 1, 25, 0, 6, 4, 2, 5, 15, 6, 13, 2, 38, 2, 12, 2, 20, 12, 35, 18, 6, 6, 9, 20, 5, 15.
    - 信頼係数0.95の信頼区間
      - $\bar{X}_{obs} \approx 10.3, S_{obs}^2 \approx 92.6$
      - $\left[10.3 - 1.96\sqrt{92.6/30}, 10.3 + 1.96\sqrt{92.6/30}\right] = [6.8, 13.7]$
- 実験
  - 標本の大きさを  $n = 30$  として標本抽出を100,000回繰り返した結果:
    - 経験的な捕捉率: 0.93 (信頼係数つまり名目捕捉率である0.95に近い)
  - 最初の100回の結果(次のスライド)

# 母平均の区間推定(5)

図2: 就労年数データによる区間推定値の実験結果の一部



# 成功確率(母比率)の区間推定(1)

- ベルヌーイ確率変数
  - $X_i \sim_{iid} \text{Bernoulli}(p) \ (i = 1, 2, \dots, n)$ 
    - $X_i = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$
  - $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \hat{p}$
  - $E(\hat{p}) = E(X_i) = p$
  - $V(\hat{p}) = \frac{V(X_i)}{n} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$
  - $\sigma^2$ の不偏推定量:  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n}{n-1} \hat{p}(1 - \hat{p})$
- 信頼係数0.95の成功確率  $p$  についての信頼区間
  - $\left[ \bar{X} - 1.96\sqrt{S^2/n}, \bar{X} + 1.96\sqrt{S^2/n} \right] =$   
 $\left[ \hat{p} - 1.96\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/(n - 1)}, \hat{p} + 1.96\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/(n - 1)} \right]$

# 成功確率(母比率)の区間推定(2)

- 例:

- JGSS2010における「現在の仕事の満足度」データ  $p = 0.664$

- 50人無作為抽出したうち、35人が「満足」または「どちらかといえば満足」と回答した。

- 信頼係数0.95の信頼区間

- $\hat{p}_{obs} = \frac{35}{50} = 0.7, S_{obs}^2 = \frac{50 \times 0.7(1-0.7)}{50-1} \approx 0.214$

- $\left[ 0.7 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{50-1}}, 0.7 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{50-1}} \right] = [0.57, 0.83]$

- 実験

- 標本の大きさを  $n = 50$  として標本抽出を100,000回繰り返した結果:

- 経験的な捕捉率: 0.92 (信頼係数つまり名目捕捉率である0.95に近い)

# 成功確率(母比率)の区間推定(3)

- 推定精度に応じた標本の大きさの決定
  - 「満足」または「どちらかといえば満足」と回答する人の母集団比率を、 $\pm 0.02$  ( $\pm 2\%$ ) の精度で推定したい。
  - 中心極限定理により、近似的に以下の性質が成り立つ。
    - $\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0, 1)$
  - したがって以下の式が成り立つ。
    - $P(-1.96\sqrt{p(1-p)/n} \leq \hat{p} - p \leq 1.96\sqrt{p(1-p)/n}) \approx 0.95$
  - 推定精度  $\pm 0.02$  を達成するには以下の条件が満たされればよい。
    - $1.96\sqrt{p(1-p)/n} \leq 0.02$
  - 2つの場合
    - 母比率  $p$  について見当がつく: 上の不等式を  $n$  について解く。
    - 母比率  $p$  について見当がつかない: 最悪の場合として  $p = 1/2$  を想定し、上の不等式を  $n$  について解く。
      - $1.96 \approx 2$  とみなせば、 $1/\sqrt{n} \leq 0.02 \Leftrightarrow n \geq 1/0.02^2 = 2500$

# 正規母集団からの標本にもとづく区間推定 (1)

- 標本の大きさ  $n$  が小さい。
  - 正規分布にもとづく区間推定の精度が悪化する。
    - 中心極限定理に依拠する正規分布による近似の精度が低い。
    - 母分散  $\sigma^2$  の推定量  $S^2$  の推定精度が低い。
  - しかし、「母集団が正規分布にしたがう」とときには、簡単な解決策がある。
- 正規母集団からの標本にもとづく区間推定
  - 標本:  $X_i \sim iid N(\mu, \sigma^2)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )
  - このとき、以下の性質が成り立つ。
    - $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t(n-1)$  参考:  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$
  - これを利用すれば、以下の性質が導かれる。
    - $P\left\{-t_{0.025}(n-1) \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \leq t_{0.025}(n-1)\right\} = 0.95$ 
      - ただし、 $t_{0.025}(n-1)$  は自由度  $n-1$  の  $t$  分布の上側 0.025 (2.5%) 点

# 正規母集団からの標本にもとづく区間推定 (2)

- 信頼係数0.95の母平均  $\mu$  の信頼区間(正規母集団の場合)
  - $\left[ \bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{S^2/n}, \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{S^2/n} \right]$
- 例:
  - NB10(名目的な重量が10gの重り)の測定結果
    - 9.999591, 9.999600, 9.999594, 9.999601, 9.999598
  - 正規母集団を仮定する。
    - 測定誤差であることと、過去の経験とから妥当な仮定とみなせる。
  - 信頼係数0.95の信頼区間
    - $\bar{X}_{obs} = 9.999597, S_{obs}^2 = 1.77 \times 10^{-11}, t_{0.025}(5-1) = 2.776$
    - $\left[ 9.999579 - 2.776\sqrt{\frac{1.77 \times 10^{-11}}{5}}, 9.999579 + 2.776\sqrt{\frac{1.77 \times 10^{-11}}{5}} \right] =$   
[9.99592, 9.99602]

# 正規母集団からの標本にもとづく区 間推定(3)

表1:t分布表の見方

| $\nu$ |     | .025<br>(.050) |     |
|-------|-----|----------------|-----|
| ...   |     | ...            |     |
| 4     | ... | 2.776          | ... |
| ...   |     | ...            |     |

- t分布表の利用方法

- 教科書付表B(p. 225)

- 表側(表の左側): 自由度  $\nu$
    - 表頭(表の上側): 右側確率

- カッコ内はその倍＝両側確率を示す。

- » 信頼係数 0.95 の信頼区間を構成するときには、

- $$\frac{1-0.95}{2} = 0.025 \quad (\text{カッコ内は} 0.05) \text{ に対応する部分を見る。}$$

- 例: 信頼係数0.95 で自由度  $5 - 1 = 4$  のとき。

- 右上の表1参照