

統計学II

早稲田大学政治経済学術院

西郷 浩

本日の目標

- 回帰係数の最小二乗推定量の性質
 - 主に傾きの推定量 $\hat{\beta}_1$ の性質について。
- 回帰係数に関する推測
 - 推定
 - 検定

誤差項と $\hat{\beta}_1$ との関係(1)

- 傾きの最小2乗推定量

$$- \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})Y_i}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}$$

- $$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y}) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})Y_i - \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})\bar{Y} \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})Y_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})Y_i \end{aligned}$$

– $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$ を上式の最右辺の分子に代入する。

誤差項と $\hat{\beta}_1$ との関係(2)

$$- \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) Y_i}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) (\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i)}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}$$

– 以下の式に注意する。

- $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) (\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \beta_0 + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \beta_1 x_i + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) u_i$
- $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \beta_0 = \beta_0 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$
- $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \beta_1 x_i = \beta_1 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) x_i = \beta_1 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

$$- \hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) u_i}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2} = \beta_1 + \sum_{i=1}^n w_i u_i$$

誤差項と $\hat{\beta}_1$ との関係(3)

– $w_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}$ の性質

- $\sum_{i=1}^n w_i = 0$
- $\sum_{i=1}^n w_i x_i = \sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}) = 1$
- $\sum_{i=1}^n w_i^2 = \frac{1}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}$

– これらの性質は、 $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$ を使って導かれる。

- 上記の式変形は Johnston (1972) から引用した。

傾きの推定量 $\hat{\beta}_1$ の性質(1)

1. 期待値が β_1 に等しい。

$$\begin{aligned} - \quad E(\hat{\beta}_1) &= E(\beta_1 + \sum_{i=1}^n w_i u_i) = \\ &\beta_1 + \sum_{i=1}^n w_i E(u_i) = \beta_1 \end{aligned}$$

- $E(u_i) = 0$ および、「 x (w) と u が無関係」を利用した。

– つまり、 $\hat{\beta}_1$ は β_1 の不偏推定量である。

- 確率的に変動する $\hat{\beta}_1$ は、 β_1 よりも大きいこともあれば小さいこともある。しかし、大きい方ばかり(または小さい方ばかり)に偏ることはない。平均的には母数である β_1 に等しい。

傾きの推定量 $\hat{\beta}_1$ の性質(2)

2. 分散が $\sigma^2 / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ に等しい。

$$\begin{aligned} - \quad V(\hat{\beta}_1) &= V(\beta_1 + \sum_{i=1}^n w_i u_i) = V(\sum_{i=1}^n w_i u_i) = \\ &= E[(\sum_{i=1}^n w_i u_i)^2] = E(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j u_i u_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j E(u_i u_j) = \sum_{i=1}^n w_i^2 E(u_i^2) = \\ &= \sum_{i=1}^n w_i^2 V(u_i) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^n w_i^2 = \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \end{aligned}$$

- $E(u_i) = 0$ 、 $V(u_i) = E(u_i^2) = \sigma^2$ 、 $E(u_i u_j) = 0$ for $i \neq j$ 、および「 x (w) と u が無関係」を利用した。

傾きの推定量 $\hat{\beta}_1$ の性質(3)

— つまり、 $\hat{\beta}_1$ の分散は

- 誤差項の分散 σ^2 （縦軸方向の散らばり）が小さいほど、
- 説明変数の散らばり $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ （横軸方向の散らばり）が大きいほど、
- 小さくなる。
 - 分散が小さい $\Leftrightarrow$ 推定精度が高い。

傾きの推定量 $\hat{\beta}_1$ の性質(4)

3. 回帰係数の推定量 $\hat{\beta}_1$ が正規分布に従う。

– $\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \sum_{i=1}^n w_i u_i$ であり、 u_i が正規分布に従うから。

• 「 u_i が正規分布に従う」と「 x (w)と u が無関係」を使った。

– 1番目と2番目の性質と合わせると、以下が成り立つ。

$$\bullet \hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}\right) \Leftrightarrow \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}} \sim N(0, 1)$$

傾きの推定量 $\hat{\beta}_1$ の性質(5)

4. 誤差の分散の推定量を使うと以下の性質が成り立つ。

$$-\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}} \sim t(n-2)$$

• ただし、 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$

– この結果は、誤差項に課された5つの条件のもとで、 $\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ が、(1) $\chi^2(n-2)$ に従い、(2) $\hat{\beta}_1$ と独立になる、という事実による。

回帰係数に関する推測(1): 推定

- 回帰係数に関する区間推定

- 信頼係数0.95の β_1 の信頼区間

- $\left[\hat{\beta}_1 - t_{0.025}(n-2) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}, \hat{\beta}_1 + t_{0.025}(n-2) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \right]$

- 例: Karl Pearson の親子の身長データ

- $\left[0.51 - 1.96 \sqrt{\frac{2.44^2}{8114.44}}, 0.51 + 1.96 \sqrt{\frac{2.44^2}{8114.44}} \right] = [0.46, 0.57]$

回帰係数に関する推測(2): 検定

- 帰無仮説と対立仮説

- $\begin{cases} H_0: \beta_1 = 0 \\ H_1: \beta_1 \neq 0 \end{cases}$

- つまり、 x が Y に影響を及ぼしていないのか、いるのか。

- H_0 が正しい: $Y_i = \beta_0 + u_i$ (x が Y に影響を及ぼしていない)

- H_1 が正しい: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$ (x が Y に影響を及ぼしている)

- 検定統計量

- $|T| = \frac{|\hat{\beta}_1|}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}}$

- 検定手続き(有意水準0.05)

- もし、 $|T| > t_{0.025}(n-2)$ であれば、 H_0 を棄却する。

- $p \text{ value} = P(|T| > |T|_{obs} | H_0)$

回帰係数に関する推測(3): 検定

– 例: Karl Pearson の親子の身長データ

$$\bullet |T|_{obs} = \frac{|0.51|}{\sqrt{\frac{2.44^2}{8114.44}}} = 19.0 > 1.96$$

• $H_0: \beta_1 = 0$ が棄却される。

- $\hat{\beta}_1$ は0と有意に異なる。
- 結果は有意である。
- β_1 は0と有意に異なる。
- 結果は5%有意である。

• 0以外が参照値となることもある。

– 例: Karl Pearson の親子の身長データ

$$\bullet \begin{cases} H_0: \beta_1 = 1 \\ H_1: \beta_1 \neq 1 \end{cases}$$

- 父親の身長が1インチ高くなったとき、息子の身長の平均値も1インチ高くなる。

回帰係数に関する推測(4): 検定

- 検定統計量

$$- |T| = \frac{|\hat{\beta}_1 - 1|}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}}$$

- 検定手続き(有意水準0.05)

– もし、 $|T| > t_{0.025}(n - 2)$ であれば、 H_0 を棄却する。

» $p \text{ value} = P(|T| > |T|_{obs} | H_0)$

- $|T|_{obs} = \frac{|0.51 - 1|}{\sqrt{\frac{2.44^2}{8114.44}}} = 18.1 > 1.96$

- $H_0: \beta_1 = 1$ が棄却される。