

統計学01

早稲田大学政治経済学部
第2回
西郷 浩

1

本日の目標

- 第4章 確率
 - 4.1 ランダムネスと確率
 - 4.2 標本空間と事象
 - 4.3 確率の定義
 - 4.4 加法定理
 - 4.5 条件つき確率と独立性

2

4.1 ランダムネスと確率

- 偶然性(ランダムネス)
 - 偶然をとまなう試行
 - コイン・トス
 - 同一人物の 100m 走 のタイム
 - 同一物の測定
 - いつも同じ結果が生じるとは限らない。
⇒ 偶然性を理論的にあつかう手法はないか？
 - 偶然性の中に法則性を見出す。その法則性を利用する。

3

4.2 標本空間と事象(1)

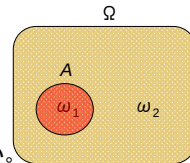
- 確率論
 - 測度論によって厳密に記述される。
∴ 集合に関連する概念によって、確率の概念が整備されている。
 - 要するに: 多少、集合に関連する用語が出てきます。
- 標本点と標本空間、事象
 - 標本点 ω : 偶然をとまなう試行の結果のひとつ
 - 標本空間 Ω : 標本点全体の集合
 - 事象 A : 標本空間の部分集合(標本点の集合)

4

4.2 標本空間と事象(2)

■ 例:

- 試行: 1枚のコインを投げる。
- 標本点: $\omega_1 = \text{H(表)}, \omega_2 = \text{T(裏)}$
- 標本空間: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{\text{H}, \text{T}\}$
- 事象:
 - $A = \{\omega_1\} = \{\text{H}\}$
 - $B = \{\omega_2\} = \{\text{T}\}$
 - $C = \{\omega_1, \omega_2\} = \{\text{H}, \text{T}\} = \Omega$
 - $D = \{\} = \phi$
 - A を「表になる事象」ということも多い。



5

4.2 標本空間と事象(3)

■ 事象の分類

- 根元事象: ただひとつの標本点から成る。
- 複合事象: 複数の標本点をふくむ。
 - 根元事象への分解が可能である。

■ 和事象、積事象、補事象、排反な事象

- 和(結合): $A \cup B = \{\omega : \omega \in A \text{ または } \omega \in B\}$
- 積(共通部分): $A \cap B = \{\omega : \omega \in A \text{ かつ } \omega \in B\}$
- 補事象(余事象): $A^c = \{\omega : \omega \notin A\}$ (A でない事象)
- 排反な事象: $A \cap B = \phi$ (同時には発生しない事象)

6

4.2 標本空間と事象(4)

■ 例

- 試行: サイコロをひとつ振る。
- 標本点: $\omega_i = \{i \text{ の目が出る} \} (i=1,2,\dots,6)$
- 標本空間: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$
- 事象:
 - $A = \{2 \text{ の倍数の目が出る} \} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$
 - $B = \{3 \text{ の倍数の目が出る} \} = \{\omega_3, \omega_6\}$
 - $C = \{ \text{奇数の目が出る} \} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$
 - $A \cap B = \{\omega_6\}; A \cup B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\};$
 $A \cap C = \phi; B^c = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\}$

7

4.2 標本空間と事象(5)

■ 便利な演算法則

分配法則

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

ド・モルガンの法則

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

その他

$$(A^c)^c = A$$

8

4.3 確率の定義(1)

■ 結論からいうと...

- 確率を「内容」によって定義することは困難。
- 形式的(数学的)な条件を満たすもの(測度)はすべて確率としてとりあつかう、という立場が主流である。

■ 「内容」からみた確率の定義

- ラプラスの定義:
 - 同様に確からしい根元事象が全部で N 個あり、事象 A に有利な根元事象が R 個あったとすると、 $P(A) = R/N$ とする。
- (経験的な)頻度による定義:
 - n 回の試行のうち事象 A が n_A 回生じたとする。 n_A / n の極限値を $P(A)$ とする。

9

4.3 確率の定義(2)

□ 主観による定義:

- 人間の選好に一定の合理性を仮定すれば、主観的な確信の度合いが論理的整合性を持つ確率とみなせる。

■ 公理主義的な確率の定義(形式的な定義)

- Ω の部分集合(厳密には、 Ω の部分集合を要素とする σ 集合体に属する集合)に対して、以下の3つの条件を満たす集合関数(測度)を確率とみなす。
 1. (σ 集合体に属する)すべての集合 A に対して $0 \leq P(A) \leq 1$
 2. $P(\Omega) = 1$
 3. (σ 集合体に属する)排反な無限系列 $A_1, A_2, A_3, \dots$ に対して、 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$

10

4.4 加法定理

■ 排反な事象 A, B (つまり $A \cap B = \phi$)について

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
 - 例: サイコロをひとつ振る試行において、 $A = \{2 \text{ 以下の目が出る}\}$, $B = \{5 \text{ 以上の目が出る}\}$ とすると、 $P(A \cup B) = P(\{2 \text{ 以下の目が出る または } 5 \text{ 以上の目が出る}\}) = P(\{1, 2, 5, 6 \text{ のいずれかが出る}\}) = 4/6$
 $P(A) = P(\{1, 2 \text{ のいずれかが出る}\}) = 2/6$
 $P(B) = P(\{5, 6 \text{ のいずれかが出る}\}) = 2/6$
 $A \cap B = \{2 \text{ 以下の目が出る かつ } 5 \text{ 以上の目が出る}\} = \phi$ であることに注意する。

■ 一般の事象においては、

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

11

4.5 条件つき確率と独立性(1)

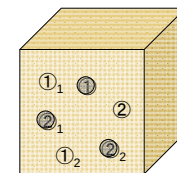
■ 条件つき確率

□ 例:

- 試行: 6つの玉が入った箱からひとつの玉を取り出す。

■ 標本点:

- $\omega_1 = \{\textcircled{1}_1 \text{ を取り出す}\}$
- $\omega_2 = \{\textcircled{1}_2 \text{ を取り出す}\}$
- $\omega_3 = \{\textcircled{2} \text{ を取り出す}\}$
- $\omega_4 = \{\textcircled{1} \text{ を取り出す}\}$
- $\omega_5 = \{\textcircled{2}_1 \text{ を取り出す}\}$
- $\omega_6 = \{\textcircled{2}_2 \text{ を取り出す}\}$



12

4.5 条件つき確率と独立性(2)

- $A = \{\text{取り出した玉の数字が1}\}$
 $B = \{\text{取り出した玉の色が白}\}$
- 取り出した玉の数字が1である確率:
 $P(A) = P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}) = 3/6$
- 取り出した玉の色が白であった(B が生じている)とする。このとき、その玉の数字が1である確率は？
 - $\{\omega_1\}$
 - $\{\omega_2\}$ } B に該当する部分に着目して A が生じる確率を求める。
 - $\{\omega_3\}$ } (標本空間を B に制限することに相当する。)
 - $\{\omega_4\}$
 - $\{\omega_5\}$ } B に該当しない
 - $\{\omega_6\}$

13

4.5 条件つき確率と独立性(3)

- 条件つき確率の定義

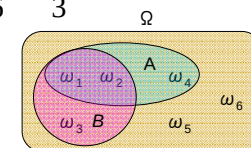
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- 先の例では、

$$P(A|B) = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

- 乗法定理

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$



14

4.5 条件つき確率と独立性(4)

■ 独立性

- 事象 A と B が独立

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

- 「事象 A の発生と事象 B の発生とが無関係である」の意。

- 先の例では、 A と B とが独立ではない。

$$P(A|B) = 2/3 \neq 3/6 = P(A)$$

- もし、箱に②と①を追加したら、 A と B は独立になる。

$$P(A|B) = 2/4 = 4/8 = P(A)$$

15

4.5 条件つき確率と独立性(5)

■ Bayes の定理

- 前提:

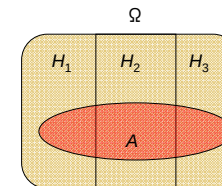
- 標本空間が $H_1, H_2, \dots, H_k$ に分割されている。
 つまり: $H_i \cap H_j = \emptyset$ ($i \neq j$) かつ $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_k$

- $P(H_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) が既知

- $P(A|H_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) が既知

- このとき

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^k P(H_j)P(A|H_j)}$$



16

4.5 条件つき確率と独立性(6)

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(H_i \cap A)}{P((H_1 \cap A) \cup (H_2 \cap A) \cup \dots \cup (H_k \cap A))} \\ &= \frac{P(H_i \cap A)}{\sum_{j=1}^k P(H_j \cap A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^k P(H_j)P(A|H_j)}\end{aligned}$$

17

4.5 条件つき確率と独立性(7)

■ Bayesの定理の有用性

- H_i : 原因となるような事象
- A : 結果となるような事象
- ふたつの条件 (満たされる場合が少なくない)
 - おおのの原因がどの程度発生するかは既知。
 - 原因 H_i のもとで、結果 A がどの程度発生するかも既知。
- これらの条件がそろえば、結果 A の発生を与件として原因 H_i の発生確率を数値的に評価できる。
 - 結果から原因について判断できる！
- $P(H_i)$ (事前確率) を観察された事実 A によって、あらたな値 $P(H_i|A)$ (事後確率) へと更新する、とも読める。

18

4.5 条件つき確率と独立性(8)

■ Bayesの定理の応用: 3つのコインの問題

- 3種類のコインがある
 - HH (両面とも表の刻印)
 - HT (片面に表、もう片面に裏の刻印)
 - TT (両面とも裏の刻印)
- 3つのうちから (どれだかわからないように) ひとつを取り出して、片面だけを見たら表の刻印であった。
- 取り出したコインがHHである確率は？

19

4.5 条件つき確率と独立性(9)

□ よくある誤答

- コインは3種類ある。しかもTTでないことは確実だ。
- 残るはHHとHT 2つで、最初にてたらしめに取っているのだから、どちらのコインも五分五分の可能性で取り出されたはずだ。
- したがって、HHである確率は $1/2$ だ。
- なぜこの「論理的推論」が間違いなのか？

20

4.5 条件つき確率と独立性(10)

□ Bayesの定理による解答

■ 記号

- $H_1 = \{\text{取り出したコインがHH}\}$
- $H_2 = \{\text{取り出したコインがHT}\}$
- $H_3 = \{\text{取り出したコインがTT}\}$
- $A = \{\text{片面が表の刻印}\}$

■ 利用可能な条件

- $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$ (どれも同じ確率で取り出される)
- $P(A|H_1) = 1$ (コインHHを取ったら、必ず表が見える)
- $P(A|H_2) = 1/2$ (コインHTを取ったら、表が見える確率は1/2)
- $P(A|H_3) = 0$ (コインTTを取ったら、絶対に表は見えない)

21

4.5 条件つき確率と独立性(11)

$$\begin{aligned} P(H_1|A) &= \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

22

4.5 条件つき確率と独立性(12)

- 先の「論理的推論」の陥った落とし穴は何か？

23