

統計学 01

早稲田大学政治経済学部
第14回
西郷 浩

1

本日の目標

- (統計的)仮説検定の考え方
- 二種類の過誤
- 仮説検定の方式
 - 単純帰無仮説 vs 単純対立仮説
 - その他の発展は次回以降

2

統計的仮説検定の考え方(1)

- 日常的な判断(作り話)
 - 友人とジャンケン(偶然が支配する勝負事)をした。
 - 相手が立て続けに10回勝った。
 - 「何かおかしい」(例:相手が自分のジャンケンのクセを見抜いていて、次に何を出すかが予見できる)と感じた。
- なぜ「何かおかしい」と感じるのか。
 - 「相手が立て続けに10回勝つ」ことは不可能ではない。
 - にもかかわらず、相手を疑うことが「自然だ」と感じる。
 - こうした判断の「合理性」を筋道立てて考えてみる。

3

統計的仮説検定の考え方(2)

- 先の判断の流れ
 1. 作業仮説:
 - 「相手も自分も同一の条件でジャンケンをしており、勝敗の可能性は五分五分だ」とする。
 - 真偽不明ながら、考察を進めるため、仮に正しいとする条件。
 2. 「作業仮説が正しい」とすると、「相手が立て続けに10回勝つこと」(実際に発生した現象)は滅多に起こらない。
 3. 2つの選択肢
 - 作業仮説を肯定(滅多にないことが実際に発生した)。
 - 作業仮説を否定(現実的でない)。

4

統計的仮説検定の考え方(3)

■ 統計的仮説検定の流れ

1. 仮説の設定
 - 帰無仮説: 仮に正しいと考える仮説(作業仮説)
 - 対立仮説: 帰無仮説が成り立たないときに成り立つ仮説
 - alternative hypothesis
2. 帰無仮説のもとで、観察された現象がどのくらいの確率で生じるのかを計算する。
3. 上の計算にもとづく確率的な判断
 - 確率が小 $\Rightarrow$ 帰無仮説を棄却(否定)=対立仮説受容
 - 確率が大 $\Rightarrow$ 帰無仮説を受容(棄却しない)=対立仮説棄却

5

二種類の過誤(1)

■ 例(ホーエル p. 158)

- これまでに発掘された頭蓋骨の分類
 - 人種Aの頭蓋骨の長さ:
 $\mu = 190\text{mm}, \sigma^2 = 8^2$
 - 人種Bの頭蓋骨の長さ:
 $\mu = 196\text{mm}, \sigma^2 = 8^2$
- 新たに発見した12個の頭蓋骨(同一の人種とする)
標本平均 = 194mm

6

二種類の過誤(2)

- 観察値(標本平均 194mm)に照らして、人種Aと人種Bのどちらに分類すべきか?
 - 人種Aよりも人種Bの方が、母平均が大きい。
 $\Rightarrow$ 「12個の頭蓋骨が人種Aに属する」場合の標本平均よりも、「12個の頭蓋骨が人種Bに属する」場合の標本平均の方が大きくなりやすい。
 - 判断基準:
 - 標本平均が小さめ $\Rightarrow$ 「人種Aに属する」
 - 標本平均が大きめ $\Rightarrow$ 「人種Bに属する」

7

二種類の過誤(3)

- では、標本平均がどれくらい大きければ、人種Bと判断すればよいか?
 - 例における 標本平均 = 194mm は、人種Bの母平均 196mm に相対的に近い。
 - けれども、そのことから、「人種Bに属する」と判断していいだろうか?
 - 人種Aに属しているとしても、「標本平均が 194mm (以上)になる確率が、それほど低くない」ということがありえないか?

8

二種類の過誤(4)

■ 検定における過誤:

□ 検定 = 意思決定の問題:

- 標本に照らして、以下のいずれかを採択
 - 仮説A:「12個の頭蓋骨が人種Aに属する」
 - 仮説B:「12個の頭蓋骨が人種Bに属する」

□ 検定における過誤:

- 真の状態と採択される仮説との組み合わせで2種類ある。

9

二種類の過誤(5)

■ 単純化

- 真の状態: AかBかのどちらかが正しい。
- 意思決定: AかBかのどちらかを採択

■ ふたつの過誤を同時に0にすることが可能か?

表1: 意思決定と真の状態との組み合わせ

		真の状態	
		仮説Aが真	仮説Bが真
意思決定	仮説A採択	○	過誤(b)
	仮説B採択	過誤(a)	○

10

二種類の過誤(6)

□ No.

■ 理由:

- 過誤(a)がなるべく起きないようにする。
 - ⇒ 標本平均の値が多少高くても、仮説Aを採択
 - ⇒ 過誤(b)が生じやすくなる。
- 過誤(b)がなるべく起きないようにする。
 - ⇒ 標本平均の値が多少低くても、仮説Bを採択
 - ⇒ 過誤(a)が生じやすくなる。

□ トレードオフの関係

□ どのように解決するか?

11

二種類の過誤(7)

■ 仮説の設定:

- 帰無仮説: 作業仮説(H_0)
 - 例 H_0 : 12個の頭蓋骨は人種Aに属する。
 - 対立仮説: H_0 に代替する仮説(H_1)
 - 例 H_1 : 12個の頭蓋骨は人種Bに属する。
- (仮説の区別は、仮説の内容ではなく、検定における役割の相違に応じて定まる。)

12

二種類の過誤(8)

■ 二種類の過誤

□ 第1種の過誤:

- H_0 が正しいときに、 H_0 を棄却する誤り。

□ 第2種の過誤:

- H_0 が正しくないときに、 H_0 を採択する誤り (H_1 が正しいときに、 H_1 を否定する誤り)

表2: 二種類の過誤

		真の状態	
		H_0 が真	H_1 が真
意思決定	H_0 を採択	○	第2種の過誤
	H_0 を棄却	第1種の過誤	○

13

二種類の過誤(9)

■ 二種類の過誤の生じる確率:

□ 第1種の過誤が生じる確率: α

- H_0 が正しいにもかかわらず、それを棄却してしまう確率

□ 第2種の過誤が生じる確率: β

- H_0 が正しくないにもかかわらず、それを採択してしまう確率 (H_1 が正しいにもかかわらず、それを否定してしまう確率)

14

二種類の過誤(10)

- 母平均に関する検定であるから、標本平均を意思決定のもととすることは自然である。したがって、検定手続きを以下のように定めることにする。

- 標本平均のある領域 D (棄却域)に標本平均が出現したら、 H_0 を棄却する。

- D 以外の領域(受容域)に標本平均が出現したら、 H_0 を受容する。

15

二種類の過誤(11)

■ 棄却域 D

- 仮に $D = \{\bar{x} \mid 192 < \bar{x} < 194\}$ とした場合(図1)

- 第1種の過誤が生じる確率 α
- 第2種の過誤が生じる確率 β

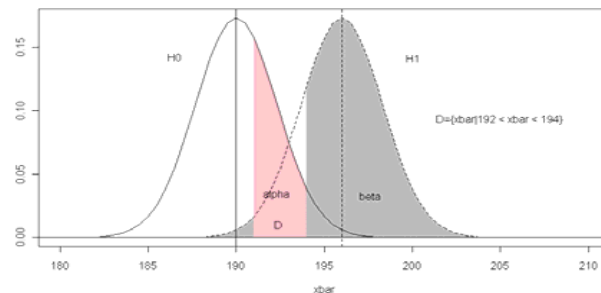
■ α と β との間のトレードオフ

- どのように棄却域 D を定めるのが適当か?

16

二種類の過誤(12)

図1: 第1種の過誤の確率 α と第2種の過誤の確率 β との関係



17

二種類の過誤(13)

■ 棄却域 D の決定

1. 第1種が生じる確率 α を小さい値に定める: 例 $\alpha = 0.05$ (有意水準とよぶ。)
 2. α の値を一定に保ったままで、第2種の過誤が生じる確率 β を最小にする。
- 頭蓋骨の判定の問題では、この原則によって(最適な)棄却域が一意的に定まる。

18

二種類の過誤(14)

□ 頭蓋骨問題:

■ $H_0: \mu = 190, \sigma = 8$

■ $H_1: \mu = 196, \sigma = 8$

H_0 を帰無仮説としたときの(最適な)棄却域の

$$D = \{\bar{x} \mid \bar{x} > c\} \quad \begin{array}{c} \text{H}_0 \text{ の受容域} \quad \text{H}_0 \text{ の棄却域 } D \\ \hline \bar{x} \end{array}$$

c such that $P(\bar{x} > c \mid H_0 \text{ が正しい}) = \alpha$

19

二種類の過誤(15)

□ 頭蓋骨問題の場合、 H_0 が正しいときには、

$$X_i \sim N(190, 8^2) (i = 1, 2, \dots, 12) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(190, \frac{8^2}{12}\right)$$

$$\therefore P(\bar{X} > c \mid H_0) = P\left(\frac{\bar{X} - 190}{\sqrt{8^2/12}} > \frac{c - 190}{\sqrt{8^2/12}} \mid H_0\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{c - 190}{\sqrt{8^2/12}} \mid H_0\right) \quad \text{ただし、} Z = \frac{\bar{X} - 190}{\sqrt{8^2/12}}$$

20

二種類の過誤(16)

- H_0 が正しければ、 $Z \sim N(0, 1)$ なので、
 - $P(Z > 1.645) = 0.05$ ← 正規分布表 p. 280
- したがって、 $\alpha = 0.05$ とすれば、

$$P\left(Z > \frac{c - 190}{\sqrt{8^2/12}} \middle| H_0\right) = 0.05 \Rightarrow \frac{c - 190}{\sqrt{8^2/12}} = 1.645$$

$$\Leftrightarrow c = 190 + 1.645\sqrt{8^2/12} = 193.8$$

21

二種類の過誤(17)

- 検定の実行
 - 観察された標本平均: $\bar{X} = 194$
 - $\bar{X}$ と棄却域 D の関係:

$$\begin{array}{c} H_0 \text{ の受容域} \quad | \quad H_0 \text{ の棄却域 } D \\ \hline 193.8 \quad \quad \quad \bar{X} = 194 \end{array}$$
 - H_0 を棄却する(H_1 を採択する)。
 - つまり、「頭蓋骨は人種Bのものだ」と考える。

22

母平均の検定(1)

- 母平均の検定1: 右側検定
 - 仮説: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \ i = 1, 2, \dots, n$
 - $H_0: \mu = \mu_0$ (具体的な数値)
 - $H_1: \mu = \mu_1 (> \mu_0, \text{具体的な数値})$
 - 棄却域:

$$D = \{\bar{X} | \bar{X} > c\} \quad \text{where} \quad P(\bar{X} > c | H_0) = \alpha$$

$\nearrow$
 有意水準(通常 0.05)

23

母平均の検定(2)

- c の決め方: 有意水準 $\alpha = 0.05$ として、
 - σ^2 が既知の場合:

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1) \Rightarrow c = \mu_0 + 1.645\sqrt{\sigma^2/n}$$
 - σ^2 が未知の場合(通常の場合):

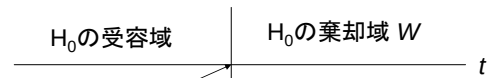
$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}} \sim t(n-1) \Rightarrow c = \mu_0 + t_{0.05}(n-1)\sqrt{s^2/n}$$

$\uparrow$
 自由度 $n-1$ の t 分布の上側5%点

24

母平均の検定(3)

- 検定等計量として、 $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}}$ をもちいることも多い。



$t_{0.05}(n-1)$ = 自由度 $n-1$ の t 分布の上側 5% 点

$$\text{棄却域 } W = \left\{ t \mid t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}} > t_{0.05}(n-1) \right\}$$

25

母平均の検定(4)

□ 仮説の拡張

- 仮説が以下のように拡張された。

- $H_0: \mu = \mu_0$

- $H_1: \mu > \mu_0$

棄却域 $D(W)$ はどのように変更されるべきか？

- 仮説が以下のように拡張された。

- $H_0: \mu \leq \mu_0$

- $H_1: \mu > \mu_0$

棄却域 $D(W)$ はどのように変更されるべきか？

26