

統計学 01

早稲田大学政治経済学部
第17回
西郷 浩

1

本日の目標

- 母分散の比の検定 (F 検定)
- χ^2 検定
 - 適合度検定
 - 質的要因の独立性の検定

2

標準的な検定手順(1)

1. 仮説の設定
 - 帰無仮説 H_0
 - 対立仮説 H_1
2. 検定統計量の選択
 - 理論的考察によって、どの統計量を使うべきかはすでにわかっている。
3. 棄却域 (臨界値) の決定
 - 理論的考察によって、どのように H_0 の棄却域を決めるべきかはすでにわかっている。

3

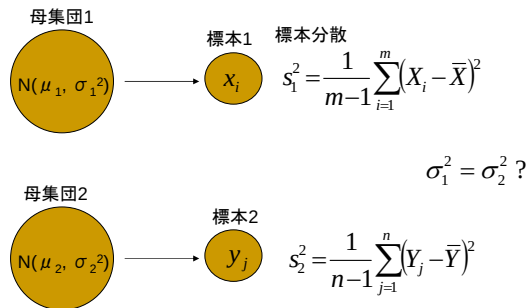
標準的な検定手順(2)

4. データから検定統計量の値を計算する。
5. 最終判断
 - 計算した検定統計量が H_0 の棄却域にふくまれる。
⇒ H_0 を棄却 (否定) する。
 - 計算した検定統計量が H_0 の棄却域にふくまれない。
⇒ H_0 を棄却 (否定) しない。
- 上のステップ2、3でどんなにみない検定統計量 (計算式) がでてきても、考え方そのものはどの検定もほぼ同じである。

4

母分散の比の検定(1)

■ 2つの(正規)母集団のバラツキの比較



5

母分散の比の検定(2)

1. 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
- 対立仮説 $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

2. 検定統計量の選択

- $F = s_1^2 / s_2^2$

3. 棄却域の決定

- H_0 のもとで、 $F \sim F(m-1, n-1)$ 自由度 $m-1, n-1$ のF分布
- したがって、棄却域 $W = \{F: F \leq F_{0.975}(m-1, n-1) \text{ or } F \geq F_{0.025}(m-1, n-1)\}$

↑ 自由度 $m-1, n-1$ のF分布の上側確率点

6

母分散の比の検定(3)

4. 標本からの検定統計量の計算

- $F_{\text{obs}} = s_1^2 / s_2^2$

5. 最終判断

- $F_{\text{obs}} \in W \Rightarrow H_0(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ を否定する。
- $F_{\text{obs}} \notin W \Rightarrow H_0(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ を否定しない。

■ 例<続> p.245

- 問題11.5(教科書 p. 243 の説明は誤植?)
- ラットの投薬群(薬を投与したグループ10匹)と対称群(薬を投与しないグループ10匹)のバラツキに差があるか?

7

母分散の比の検定(4)

1. 仮説の設定

- 帰無仮説 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
- 対立仮説 $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

2. 検定統計量の選択

- $F = s_1^2 / s_2^2$

3. 棄却域の決定

- H_0 のもとで、 $F \sim F(10-1, 10-1)$
- 棄却域 $W = \{F: F \leq F_{0.975}(9, 9) = 0.248 \text{ or } F \geq F_{0.025}(9, 9) = 4.026\}$ (教科書 p.245 ???)

8

母分散の比の検定(5)

4. 標本からの検定統計量の計算

- $F_{\text{obs}} = S_1^2 / S_2^2 = 0.0761 / 0.0294 = 2.59$

5. 最終判断

- $F_{\text{obs}} = 2.59 \notin W \Rightarrow H_0(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ を否定しない。

9

適合度の検定(1)

■ 架空例:

- サイコロを600回振って出目を観察したところ、表1のようになった。
- このサイコロは公正である(どの出目も等しい確率で出現する)といえるか。

表1: サイコロの出目の出現回数(架空のデータ)

出目	1	2	3	4	5	6	合計
出現度数	96	102	106	89	103	104	600

10

適合度の検定(2)

1. 仮説の設定

- 帰無仮説 H_0 : どの出目も等しい確率 1/6 で出現
- 対立仮説 H_1 : 少なくともひとつの出目の出現確率が異なる。

2. 検定統計量の選択(天下りの説明)

- もし、 H_0 が正しいければ、いずれの出目も平均的に $600 \times 1/6 = 100$ 回 出現する。これを理論度数とよぶ。
- 観測された度数と理論度数とのズレが大きければ、 H_0 が成り立っていないと考える。

11

適合度の検定(3)

- ズレをどのように測るか？
 - $\chi^2 = \sum \{\text{差の2乗} / \text{理論度数}\}$
- H_0 が正しいとき、
 - $\chi^2 \sim \chi^2(6-1)$ 自由度 6-1 の χ^2 分布

表2: サイコロの出目データについての観測度数と理論度数

	1	2	3	4	5	6	合計
観測	96	102	106	89	103	104	600
理論	100	100	100	100	100	100	600
差	-4	2	6	11	3	4	--

12

適合度の検定(4)

3. 棄却域の決定 (有意水準0.05)

$$W = \{\chi^2 : \chi^2 \geq \chi_{0.05}^2(6-1) = 11.0705\}$$

4. 検定統計量の計算

$$\begin{aligned}\chi_{\text{obs}}^2 &= \frac{(-4)^2}{100} + \frac{2^2}{100} + \frac{6^2}{100} + \frac{11^2}{100} + \frac{3^2}{100} + \frac{4^2}{100} \\ &= 2.02\end{aligned}$$

5. 最終判断

$$\chi_{\text{obs}}^2 \notin W \Rightarrow H_0 \text{を否定しない。}$$

13

質的要因の独立性の検定(1)

- 英語と数学の成績

□ 表3(架空のデータ)

- 英語と数学の成績は独立(無関係)といえるか？

表3: 数学・英語の成績の観測度数

英 数	優	良	可	計
優	12	12	6	30
良	10	22	8	40
可	8	10	12	30
計	30	40	30	100

14

質的要因の独立性の検定(2)

- 事象の独立(復習)

□ 「事象 A, B が独立」とは、以下の式が成り立つこと。

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

- 今の問題の場合には、

□ 「数学と英語の成績が独立」とは、以下が成り立つこと。

$$A = \text{「英語の成績が優」}, B = \text{「数学の成績が優」} \text{として、} \\ P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

■ 他の成績の組み合わせについても同様の式が成り立つ。

15

質的要因の独立性の検定(3)

- 帰無仮説「英語と数学の成績は独立」のもとでの理論度数の計算

□ 英語(数学)の成績の出現確率の推定:

■ たとえば、 $A = \text{「英語の成績が優」}$ としたら、 $P(A)$ を以下のように推定する。

$$P(A) \text{の推定値} = (\text{英語の成績が優の者の数}) / \text{総度数} = 30/100$$

■ 他の科目・成績についても同様

□ 帰無仮説「英語と数学の成績は独立」が正しいければ、 $B = \text{「数学の成績が優」}$ として、 $P(A \cap B) = P(A) P(B)$ なのだから、推定にもこの式を利用する。

16

質的要因の独立性の検定(4)

- つまり、
 - $P(A)$ の推定値 = (英語の成績が優の者の数)/総度数 = $30/100$
 - $P(B)$ の推定値 = (数学の成績が優の者の数)/総度数 = $30/100$
 - $P(A \cap B)$ の推定値 = $P(A)$ の推定値 $\times P(B)$ の推定値
 $= 30/100 \times 30/100 = 9/100$
- 同様にしてすべての科目・成績の組み合わせについて、帰無仮説「英語と数学の成績は独立」が正しいとしたときの出現確率の推定値を求める。
- 推定された出現確率に総度数を乗じて、帰無仮説「英語と数学の成績は独立」が正しいときの理論度数を求める。

17

質的要因の独立性の検定(5)

- 英語と数学の成績の理論度数(表4)
 - 帰無仮説「英語と数学の成績は独立」が正しいとしたときの理論度数であることに注意。
- 観測度数(表3)と理論度数(表4)とのズレが大きければ帰無仮説を否定する。

表4: 数学・英語の成績の理論度数

英 数	優	良	可	計
優	9	12	9	30
良	12	16	12	40
可	9	12	9	30
計	30	40	30	100

18

質的要因の独立性の検定(6)

- ズレをどのように測るか？
 - 差 = 観測度数 - 理論度数 として
 - $\chi^2 = \sum \{\text{差の2乗} / \text{理論度数}\}$
 - 帰無仮説「英語と数学の成績が独立」であれば、
 - $\chi^2 \sim \chi^2((3-1) \times (3-1))$ 自由度4の χ^2 分布

19

質的要因の独立性の検定(7)

1. 仮説の設定
 - 帰無仮説 H_0 : 英語と数学の成績が独立である。
 - 対立仮説 H_1 : 英語と数学の成績が独立ではない。
2. 検定統計量の選択
 - $\chi^2 = \sum \{(\text{観測度数} - \text{理論度数})^2 / \text{理論度数}\}$
3. 棄却域の決定
 - $W = \{\chi^2: \chi^2 \geq \chi^2_{0.05}((3-1) \times (3-1)) = 9.48773\}$
4. 検定統計量の計算

20

質的要因の独立性の検定(8)

$$\begin{aligned}\chi^2_{\text{obs}} &= (12-9)^2/9 + (12-12)^2/12 \\ &+ (6-9)^2/9 + (10-12)^2/12 \\ &+ (22-16)^2/16 + (8-12)^2/12 \\ &+ (8-9)^2/9 + (10-12)^2/12 \\ &+ (12-9)^2/9 \\ &= 7.36\end{aligned}$$

■ 最終判断

□ $\chi^2_{\text{obs}} \notin W$

表5 観測度数と理論度数(カッコ内)

英 数	優	良	可	計
優	12 (9)	12 (12)	6 (9)	30
良	10 (12)	22 (16)	8 (12)	40
可	8 (9)	10 (12)	12 (9)	30
計	30	40	30	100